Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2022

Einführung in Mathematisches Denken und Arbeiten
M. Sc. Theresa Kumpitsch

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (Zuordnungen, Abbildungen und Woldefiniertheit)

(a) Welche der folgenden Zuordnungen sind (wohldefinierte) Abbildungen:

(i) Mensch $\mapsto$ Körpergröße

(ii) Körpergewicht $\mapsto$ Mensch

(iii) Mensch $\mapsto$ Telefonnummer

(b) Betrachte die folgende Zuordnung

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad n \mapsto \begin{cases} 2, & \text{falls } 2 \mid n \\ 3, & \text{falls } 3 \mid n \\ 0, & \text{falls } 2 \nmid n \text{ und } 3 \nmid n. \end{cases}$$

Wird durch diese Vorschrift eine Abbildung definiert? Versucht im Anschluss allgemeiner zu formulieren, wann eine durch Fallunterscheidungen gegebene Zuordnungsvorschrift eine (wohldefinierte) Abbildung festlegt.

Aufgabe 2 (Bild und Urbild)

Sei $f\colon X \to Y$. Es seien $N \subseteq X$ und $M \subseteq Y$ Teilmengen des Definitions- bzw. Wertebereichs. Bestimme in den folgenden Beispielen das Bild $f(N)$ von N unter f und das Urbild $f^{-1}(M)$ von M unter f.

(a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto n^2$ und $N = M = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ gerade}\}$;

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 4x + 1$ und $N = M = [a, b]$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$.

Falls die Begriffe der Injektivität, Surjektivität und Bijektivität nicht mehr in der Vorlesung besprochen wurden, reicht es, in Aufgabe 3 die Wohldefiniertheit zu begründen.

Aufgabe 3 (Mehr Beispiele)

Entscheide, ob die folgenden Abbildungen wohldefiniert sowie injekiv, surjektiv oder bijektiv sind:

(a) $f_1\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n^2$;

(b) $f_2\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto n^2$;

(c) $f_3\colon \mathbb{R} \to [0, \infty), x \mapsto x^2 + 1$;

(d) $f_4\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 4x + 1$;

(e) $f_5 \colon \mathbb{R} \to [-1, 1], x \mapsto \sin x$.

Aufgabe 4 (Injektiv und surjektiv)

Es seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeige:

(a) f ist injektiv genau dann, wenn $f^{-1}(f(N)) = N$ für alle $N \subseteq X$ gilt.

(b) f ist surjektiv genau dann, wenn $f(f^{-1}(M)) = M$ für alle $M \subseteq X$ gilt.