Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2021/2022
25. Oktober 2021

Lineare Algebra 1
Prof. Dr. Martin Möller
Johannes Schwab

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Wir erinnern an die Abkürzungszeichen $\wedge$ ("und") und $\vee$ ("oder").

(a) Bestimmen Sie die Negation der folgenden Aussagen:

  (i) $\exists n \in \mathbb{N} : (n \text{ ist gerade}) \wedge (n > 2)$

  (ii) $\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N} : x + y \geq 1$

(b) Bestimmen Sie die Kardinalität der Menge

$$M := \big(\{n \in \mathbb{Z} : n \text{ gerade}\} \cap \{k \in \mathbb{Z} : k < 10\} \cap \{m \in \mathbb{Z} : 0 \geq 1 - m\}\big).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und $A, B \subseteq X$, sowie $C, D \subseteq Y$.

Zeigen Sie:

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

(b) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$;

(c) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$;

(d) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

Geben Sie zudem ein Beispiel an, bei dem die Inklusion echt ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Abbildungen.

(a) Zeigen Sie: $g \circ f$ ist injektiv $\implies$ f ist injektiv.

(b) Zeigen Sie: $g \circ f$ ist surjektiv $\implies$ g ist surjektiv.

(c) Finden Sie Beispiele für f und g, so dass

  (i) f injektiv ist, aber $g \circ f$ nicht injektiv ist.

  (ii) g surjektiv ist, aber $g \circ f$ nicht surjektiv ist.

  (iii) $g \circ f$ injektiv ist, aber g nicht injektiv ist.

  (iv) $g \circ f$ surjektiv ist, aber f nicht surjektiv ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Entscheiden Sie (mit Begründung), ob es sich bei folgenden Mengen mit Verknüpfungen um Gruppen handelt.

(a) $(\{1, -1\}, \cdot)$, wobei $\cdot$ die übliche Multiplikation bezeichne.

(b) $(\mathcal{P}(A), \cap)$, wobei A eine beliebige nicht-leere Menge sei.

(c) $(G^2, \circ)$, wobei $(G, *)$ eine Gruppe ist und wir die Verknüpfung $\circ \colon G^2 \times G^2 \to G^2$ definieren durch

$$(g_1, g_2) \circ (h_1, h_2) := (g_1 * h_1, g_2 * h_2).$$

Abgabe bis **10:15** am **Montag, den 25. Oktober** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.