Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2021/2022
1. November 2021

Lineare Algebra 1
Prof. Dr. Martin Möller
Johannes Schwab

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe.

(a) Sei $U \subset G$ eine Teilmenge. Zeigen Sie:

$$U \text{ ist eine Untergruppe } \iff U \neq \emptyset \text{ und } \forall x, y \in U : x \circ y^{-1} \in U.$$

(b) Zeigen Sie: Für alle $x, y \in G$ gilt $(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}$.

(c) Sei jetzt angenommen, dass für alle $x \in G$ gilt: $x = x^{-1}$. Zeigen Sie: $(G, \circ)$ ist abelsch.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien $(G, \circ)$ und $(H, *)$ Gruppen und $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie:

(a) f ist injektiv $\iff \ker f = \{e_G\}$.

(b) Das Bild von f ist eine Untergruppe von H.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Seien $2 \leq p, q \leq n$ ganze Zahlen. Weiter seien $\pi := (a_1 \ \dots \ a_p)$ und $\sigma := (b_1 \ \dots \ b_q)$ disjunkte Zykel in S_n, d.h. $a_i \neq b_j$ für alle $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$. Zeigen Sie, dass $\pi \circ \sigma = \sigma \circ \pi$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Sei $n \geq 2$ und

$$S' := \{\pi \in S_n : \pi(n) = n\}$$

die Teilmenge aller Permutationen, die das n-te Element fixieren. Zeigen Sie:

(a) $(S', \circ)$ ist eine Untergruppe von S_n.

(b) Es gibt eine Gruppenisomorphismus $f : S_{n-1} \to S'$.

(c) Für $n \geq 3$ ist die Teilmenge

$$T := \{(a\ b) \in S_n : a, b \in \{1, \dots, n\}, a \neq b\} \cup \{\mathrm{id}\}$$

bestehend aus allen Transpositionen und der Identität keine Untergruppe von $(S_n, \circ)$.

Abgabe bis **10:15** am **Montag, den 8. November** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.