KLAUSUR
für das Staatsexamen Mathematik
L2/L5

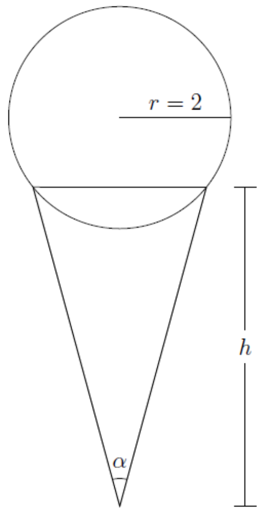
Am 15. September 2015 von 9 bis 13 Uhr

Bitte nehmen Sie für jede Aufgabe gesonderte Blätter. Schreiben Sie Ihren Namen leserlich auf jedes benutzte Blatt, nummerieren Sie die Blätter sinnvoll und lassen Sie an beiden Seiten Ränder zum Abheften bzw. für die Korrektur. Bedenken Sie bitte, dass Ihre Darstellungs- und Ausdrucksweise mitbewertet wird. Längere Texte sind nicht unbedingt besser!

Es werden nur zwei c)-Teile gewertet; bearbeiten Sie nicht unnötig mehr als zwei.

Erlaubte Hilfsmittel: ein (nicht programmierbarer) Taschenrechner sowie ein handbeschriebenes, mit bloßem Auge lesbares DIN A4-Blatt.

Aufgabe 1 (Elementarmathematik)



Ein Eishersteller möchte gerne Eis in der Tüte produzieren und denkt über geeignete Ausmaße für die Eistüte nach. Diese soll ein Kegel sein und eine Eiskugel mit Radius $r = 2cm$ aufnehmen. (Die Wanddicke soll im Folgenden vernachlässigt werden.)

a) Bisher werden Eistüten mit Höhe $h = 3\sqrt{3}cm$ und Öffnungswinkel $\alpha = \frac{\pi}{3}$ verwendet. Wie groß ist in diesem Fall das Volumen der Tüte?

b) Bei der neuen Eistüte soll der Kegelmantel an seinem oberen Rand die Kugel tangential berühren. Wie groß sind in diesem Fall Höhe und Volumen der Tüte, wenn der Öffnungswinkel wieder $\alpha = \frac{\pi}{3}$ betragen soll?

c) Welche Ausmaße muss die Tüte haben, wenn $\frac{27}{32}$ der Eiskugel oberhalb des Tütenrandes liegen sollen und das Volumen des Kegels $V = 16cm^3$ betragen soll?

Tipp: Das Volumen V einer Kugelkappe der Höhe h (Kugelradius r) beträgt $V = \frac{h^2\pi}{3}(3r - h)$. Lösen Sie die entstehende kubische Gleichung durch geschicktes Raten einer einfachen ganzzahligen Lösung.

Aufgabe 2 (Lineare Algebra und Geometrie)

a) Im $\mathbb{R}^3$ seien zwei Geraden in vektorieller Darstellung gegeben als

$$g \coloneqq \{(2,1,4) + t(1,2,-1) \mid t \in \mathbb{R}\} \text{ und } h \coloneqq \{(0,5,0) + s(3,-2,3) \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

Haben sie einen Schnittpunkt? Wenn ja, rechnen Sie diesen bitte aus.

b) Beschreiben Sie die beiden Geraden g und h als Lösungsmengen von jeweils einem linearen Gleichungssystem in den Unbekannten x, y und z. Erläutern Sie, wie Sie zu Ihren Gleichungssystemen gekommen sind.

c) Zeichnen Sie die beiden Geraden in Grund- und Aufriss (Grundriss: xy-Ebene, Aufriss: yz-Ebene). Wie kann man der Zeichnung ansehen, ob sich die beiden Geraden schneiden oder nicht? Funktioniert das Verfahren für beliebige Paare von Geraden oder gibt es Ausnahmen?

Aufgabe 3 (Stochastik)

Sei X_n die Anzahl der Köpfe bei n-maligem Münzwurf, $n \geq 1$. Wir betrachten in Teilaufgabe a) eine faire Münze, in b) und c) auch den Fall einer unfairen Münze, bei der die Wahrscheinlichkeit p, Kopf zu zeigen, irgendeinen Wert zwischen 0 und 1 hat.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $X_4 = 3$ im Fall $p = \frac{1}{2}$.

b) Sei a_n die Wahrscheinlichkeit, dass X_n einen geradzahligen Wert annimmt. Begründen Sie für $n \geq 1$ die Formel

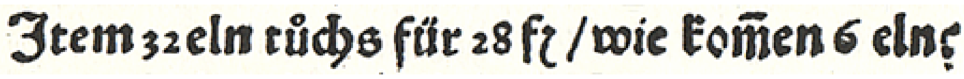
$$a_n = qa_{n-1} + p(1 - a_{n-1}) = (q - p)a_{n-1} + p$$

mit $q = 1 - p$ und $a_0 = 1$.

c) Lösen Sie die Rekursion aus b) auf. Unterscheiden Sie dazu die Fälle $p = q$ bzw. $p \neq q$ und betrachten Sie im zweiten Fall $(q - p)^{-n} a_n$.

Aufgabe 4 (Didaktik der Algebra)

a) Im Rechenbuch von Adam Riese findet sich folgende Aufgabe:


Jtem 32 eln tůchs für 28 fl / wie kom̄en 6 eln?

»Ebenso 32 Ellen Tuch für 28 Gulden, [auf] wie[viel] kommen 6 Ellen?«

Lösen Sie diese Dreisatzaufgabe mittels dreier verschiedener Verfahren und erläutern Sie jeweils, worin das spezifische dieses Verfahrens besteht.

b) Eine bekannte PISA-Aufgabe lautet: »Eine Pizzeria bietet zwei runde Pizzas in derselben Dicke an. Die kleinere hat einen Durchmesser von 30 Zentimetern und kostet 30 Zeds. Die größere hat einen Durchmesser von 40 Zentimetern und kostet 40 Zeds. Bei welcher Pizza bekommt man mehr für sein Geld?«

Erläutern Sie, welche „richtige" (Dreisatz-)Lösung hier erwartet wird. Nennen Sie anschließend zwei sachliche Bedenken/Einwände, die hier gegen Dreisatz/Proportionalität als mathematisches Modell sprechen.

c) In der gegenwärtigen Didaktik werden Dreisatzaufgaben in funktionale Betrachtungen eingebettet. Nennen Sie Vorteile und Nachteile dieser Einbettung und wägen Sie sie gegeneinander ab.

Aufgabe 5 (Didaktik der Geometrie)

Auf der folgenden Seite sehen Sie einen Ausschnitt aus einem Gesamtschulbuch der Klasse 10.

a) An den nummerierten Stellen [1.] bis [7.] fehlt jeweils die mathematische Grundlage, auf der die jeweils folgenden Umformungsschritte beruhen. Nennen Sie diese.

b) In der Geometriedidaktik der Sekundarstufe I werden üblicherweise zwei Einstiege in die Winkelfunktionen Sinus bzw. Kosinus genannt. Erläutern Sie diese jeweils kurz. Legen Sie anschließend begründet dar, welcher Einstieg wohl in dem Gesamtschulbuch gewählt worden ist. Argumentieren Sie zum Schluss, inwiefern mit diesem Einstieg an das Vorwissen von SchülerInnen angeknüpft werden kann.

c) Leiten Sie auf Niveau der Klasse 10 aus dem Additionstheorem her:

1.) die einschlägige Formel für $cos(\alpha - \beta)$;

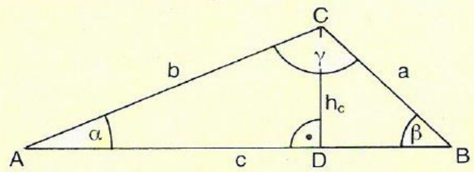
2.) die Identität $\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2} \cdot \big(cos(\alpha + \beta) + cos(\alpha - \beta)\big)$ sowie

3.) die Identität $cos(3\alpha) = 4 \cdot cos^3(\alpha) - 3 \cdot cos(\alpha)$.

Material zu Aufgabe 5

1. So kannst du zeigen, daß für $\cos(\alpha + \beta)$ die folgende Beziehung gilt:
$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

1. Stelle [1.] die Gleichung für c^2 auf und forme um.



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma \qquad | -a^2 - b^2$$
$$c^2 - a^2 - b^2 = -2ab \cdot \cos\gamma$$

2. Ersetze γ [2.] und benutze [3.]

$$c^2 - a^2 - b^2 = -2ab \cdot \cos(180 - (\alpha + \beta)$$
$$c^2 - a^2 - b^2 = 2ab \cdot \cos(\alpha + \beta))$$
$$\boxed{2ab \cdot \cos(\alpha + \beta) = c^2 - a^2 - b^2}$$

3. Ersetze zunächst c durch $\overline{AD} + \overline{DB}$ und benutze [4.]. Setze anschließend in der Formel für c^2 den erhaltenen Term ein.

$$c^2 = (\overline{AD} + \overline{DB})^2 = \overline{AD}^2 + 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{DB} + \overline{DB}^2$$
$$\boxed{2ab \cdot \cos(\alpha + \beta) = \overline{AD}^2 + 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{DB} + \overline{DB}^2 - a^2 - b^2}$$

4. Benutze [5.] und [6.] in den Teildreiecken ADC und DBC. Setze anschließend in der Formel die für $\overline{AD}^2$, $\overline{DB}^2$, $\overline{AD}$ und $\overline{DB}$ erhaltenen Terme ein.

$$\overline{AD}^2 = b^2 - h_c^2 \qquad \overline{DB}^2 = a^2 - h^2c \qquad \overline{AD} = b \cdot \cos\alpha \qquad \overline{DB} = a \cdot \cos\beta$$
$$2ab \cdot \cos(\alpha + \beta) = b^2 - h_c^2 + 2 \cdot b \cdot \cos\alpha \cdot \alpha \cdot \cos\beta + a^2 - h_c^2 - a^2 - b^2$$
$$\boxed{2ab \cdot \cos(\alpha + \beta) = 2ab \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta - 2h_c^2}$$

5. Benutze [7.] in den Teildreiecken ADC und DBC. Ersetze h_c in der Formel einmal durch den einen erhaltenen Term, einmal durch den anderen erhaltenen Term. Forme anschließend um.

$$h_c = b \cdot \sin\alpha \qquad h_c = a \cdot \sin\beta$$
$$2ab \cdot \cos(\alpha + \beta) = 2ab \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta - 2 \cdot a \cdot \sin\beta \cdot b \cdot \sin\alpha$$
$$2ab \cdot \cos(\alpha + \beta) = 2ab \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta - 2ab \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \qquad |:(2ab)$$
$$\boxed{\mathbf{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}}$$