KLAUSUR
für das Staatsexamen Mathematik
L2/L5

Herbst 2018

Bitte nehmen Sie für jede Aufgabe gesonderte Blätter. Schreiben Sie Ihren Namen leserlich auf jedes benutzte Blatt, nummerieren Sie die Blätter sinnvoll, und lassen Sie an beiden Seiten Ränder zum Abheften bzw. für die Korrektur. Bedenken Sie bitte, dass Ihre Darstellungs- und Ausdrucksweise mitbewertet wird. Längere Texte sind nicht unbedingt besser!
Es werden nur zwei c-Teile gewertet; bearbeiten Sie nicht unnötig mehr als zwei.

Aufgabe 1 (Elementarmathematik I)

a) Hat die Gleichung $323x + 119y = 13$ ganzzahlige Lösungen, also mit $(x;y)\in Z^2$? Wenn ja, welche; wenn nein, warum nicht?
b) Bestimmen Sie eine ganzzahlige Lösung $y\in Z$ der Kongruenz $119\, y \equiv 34 \mod 323$.
c) Bestimmen Sie alle ganzzahligen Lösungen von $119\, y \equiv 34 \mod 323$.

Aufgabe 2 (Didaktik: Gleichungslehre)

Das Lösen von Gleichungen spielt in der Schulalgebra eine große Rolle.

a) Lösen Sie die Gleichung $5x+ 8 = 23$ mit dem Waagemodell, nach der Operatormethode und durch systematisches Probieren.
b) Zeigen Sie die Vorteile und Grenzen des systematischen Probierens, des Waagemodells und der Operatormethode auf.
c) Lösen Sie die Gleichung $x^3+3x=10-6x^2$ einmal exakt und einmal näherungsweise (Die Methoden seien Ihnen überlassen).

Aufgabe 3 (Lineare Algebra)

In der euklidischen Ebene sei ein ebenes Dreieck gegeben. Als Nullpunkt des Koordinatensystems sei der Mittelpunkt des Umkreises gewählt, und die Eckpunkte des Dreiecks seien durch ihre Ortsvektoren u; v; w gegeben. Ihre Längen sind also der Umkreisradius des Dreiecks

$$\mathrm{r} = \|u\| = \|v\| = \|w\|$$

a) Man beweise: h := u + v + w ist der Ortsvektor des Höhenschnittpunkts unseres Dreiecks.

b) $\mathrm{a} := \|v - w\|$; $b := \|w - u\|$; $c := \|u - v\|$ sind die Seitenlängen des Dreiecks. Erläutern Sie, warum die drei Parameterdarstellungen

$$u + \lambda_1\left(\tfrac{1}{\mathrm{c}}(v-u)+\tfrac{1}{\mathrm{b}}(w-u)\right),\ v + \lambda_2\left(\tfrac{1}{\mathrm{c}}(u-v)+\tfrac{1}{\mathrm{a}}(w-v)\right), w + \lambda_3\left(\tfrac{1}{\mathrm{b}}(u-w)+\tfrac{1}{\mathrm{a}}(v-w)\right)$$

die Winkelhalbierenden des Dreiecks darstellen.

c) s:= a + b + c ist der Umfang des Dreiecks. Zeigen Sie, dass m:= $\frac{1}{\mathrm{s}}(\mathrm{a}u + \mathrm{b}v + \mathrm{c}w)$ der Ortsvektor des Inkreismittelpunkts unseres Dreiecks ist.

Aufgabe 4 (Geometrie)

David und Matteo sind seit langer Zeit gute Freunde, und besuchen zeitgleich eine Konferenz, die jedoch an verschiedenen Orten der Welt stattfinden. Matteo befindet sich in Spitzbergen, während David in Montreal ist. Per Mail fragt David seinen Freund, ob er eine Produktformel für den Kosinus kennt.

a) Helfen Sie Matteo, indem Sie

$$\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left(cos(\alpha-\beta) + cos(\alpha+\beta)\right)$$

herleiten.

b) Nachdem Matteo die Lösung gefunden hat, will er diese seinem Freund zeigen und beschließt kurzerhand zu ihm zu fliegen. Welche Strecke muss er von Spitzbergen (75° nördliche Breite, 17°ostliche Länge) nach Montreal (45° nördliche Breite, 73° westliche Länge) auf kürzestem Weg mit dem Flugzeug zurücklegen, wenn der Erdradius ungefähr 6380 km beträgt?

Hinweis: Benutzen Sie, dass $cos\left(\frac{23}{90}\cdot\pi\right) \approx \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ist.

c) Als beide sich treffen, stellt David belustig fest: "Es wäre doch cool, von hier in die Mongolei (45° nördliche Breite, 107° östliche Länge) auf einer Ellipse durch das Erdinnere zu reisen." Betrachten Sie den 45°-nördlichen Breitenkreis eingebettet in R2, wobei der Kreismittelpunkt dem Punkt (0;0) entspricht. Gegeben sei die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}=1$ die durch Montreal und die Mongolei geht und deren eine Halbachse doppelt so groß ist wie die andere. Bestimmen Sie a und b und geben Sie die Koordinaten der zwei Brennpunkte an.

Aufgabe 5 (Stochastik)

Sei $0 < p < 1$ und $q = 1 - p$. Eine Zufallsvariable X mit Werten in der Menge $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ heißt geometrisch verteilt zum Parameter p, falls

$$\mathbf{P}(X = n) = pq^{n-1} \quad \text{für alle } n \in \mathbf{N} .$$

a) Beschreiben Sie ein Zufallsexperiment, in dem eine geometrisch verteilte Zufallsvariable X auftritt. Welcher mathematische Sachverhalt ist gemeint, wenn man sagt, dass der Erwartungswert von X gleich $1/p$ ist?

b) Begründen Sie die Formel $\mathbf{P}(X > m) = q^m$ und folgern Sie folgende Eigenschaft der geometrischen Verteilung:

$$\mathbf{P}(X > m + n \mid X > m) = \mathbf{P}(X > n) \ , \ m, n \in \mathbf{N} .$$

Können Sie erklären, wieso man hier von der „Gedächtsnislosigkeit" der geometrischen Verteilung spricht?

c) Seien X, Y zwei unabhängige, geometrisch verteilte Zufallsvariable, zu den Parametern p und p′. Berechnen Sie die Verteilung von $X - Y$.