Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2021/2022
24. Januar 2022

Lineare Algebra 1
Prof. Dr. Martin Möller
Johannes Schwab

Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Bestimmen Sie $\mathrm{CharPoly}_A$ für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie zudem die Spur, die Determinante sowie die Eigenräume und -werte von A.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Berechnen Sie den Rang, die Eigenwerte und Eigenräume und zuletzt das charakteristische Polynom der Matrix

$$N := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst: Sei V ein K-Vektorraum, $f \in \mathrm{End}(V)$ und $\lambda, \lambda' \in K$. Dann haben verschiedene Eigenräume von f trivialen Schnitt: für $\lambda \neq \lambda'$ ist $E_\lambda \cap E_{\lambda'} = \{0\}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Sei K ein Körper und $p \in K$. Wir erinnern an den Endomorphismus

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \colon K[x] \to K[x], \quad x^n \mapsto nx^{n-1}$$

und den Ringhomomorphismus

$$ev_p \colon K[x] \to K, \quad f \mapsto f(p).$$

Zeigen Sie:

$$f, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f \in \mathrm{Kern}(ev_p) \iff (X-p)^2 \mid f.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst die *Leibniz-Regel*:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f)g + f\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g).$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: $(x-1) \mid (x^n - 1)$ und berechnen Sie

$$\frac{x^n-1}{x-1}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Sei V ein K-Vektorraum. Eine Abbildung $f \in \operatorname{End}(V)$ heißt Projektion, falls $f \circ f = f$ gilt. Welche $\lambda \in K$ können als Eigenwerte einer Projektion vorkommen?

(b) Zeigen Sie, dass eine Matrix und ihre Transponierte die selben Eigenwerte haben. Gilt dies auch für die Eigenvektoren?

Abgabe bis **10:15** am **Montag, den 31. Januar** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.