Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2021/2022
7. Februar 2022

Lineare Algebra 1
Prof. Dr. Martin Möller
Johannes Schwab

Übungsblatt 13

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei K ein Körper. Erinnerung: Zwei Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ heißen *konjugiert*, falls es eine Matrix $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt, so dass $T^{-1}AT = B$. „Konjugiert“ definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge $K^{n\times n}$.

(a) Sei $E \subset K^{n\times n}$ eine Äquivalenzklasse. Zeigen Sie: Alle Matrizen in E haben die gleichen Eigenwerte.

(b) Wie viele Äquivalenzklassen $E \subset \mathbb{C}^{3\times 3}$ gibt es, so dass alle Matrizen in E genau die Eigenwerte -2 und π haben?

(c) Beweisen oder widerlegen Sie: Zwei Matrizen sind konjugiert genau dann, wenn sie das gleiche charakteristische Polynom und das gleiche Minimalpolynom haben.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\alpha \in \mathrm{End}(V)$.

Zeigen Sie: Existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\alpha^n = \mathrm{id}$, so ist α diagonalisierbar.

(b) Finden Sie einen $\mathbb{R}$-Vektorraum V und einen Endomorphismus $\alpha \in \mathrm{End}(V)$ und ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\alpha^n = \mathrm{id}$, aber α *nicht* diagonalisierbar ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{5\times 5}.$$

Geben Sie $\mathrm{CharPoly}_A$ an und bestimmen Sie die Jordannormalform von A.

Hat $\mathbb{C}^5$ eine Basis aus Eigenvektoren von A?

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ mit $\mathrm{CharPoly}_\varphi(t) = (t+1)^3(t-1)^2(t-2)$ und Minimalpolynom $P(t) = (t+1)(t-1)^2(t-2)$.

Wie sieht die Jordannormalform von φ aus?

Abgabe bis **10:15** am **Montag, den 14. Februar** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.