Forschungsseminar Darmstadt-Frankfurt SS 2014

Noether-Lefschetz und Gromov-Witten

Prof. Dr. Anna von Pippich, Dr. Eric Hofmann

Termine:

1.	2.	3.	4.	5.	6.
24.4	22.5	5.6	12.6	26.6	17.7
Fa	Da	Fr	Da	Fr	Da

0 Einführung — 24.4 (Frankfurt)
Anna von Pippich

Kurze Einführung und Übersicht über den weiteren Verlauf des Seminars. (ca. 20 Minuten)

1 + 2 K3-Flächen — 24.4 (Frankfurt)
Nithi Rungtanapirom, Matteo Constantini

In den beiden Vorträgen der ersten Sitzung sollte eine Einführung in die Theorie der K3-Flächen allgemein gegeben werden und evtl. im zweiten Vortrag die Noether-Lefschetz Theorie vorbereitet werden, die in Vortrag 5 vertieft wird.

- Definition von K3-Flächen und Calabi-Yau Manigfaltigkeiten
- Polarisierungen und Quasi-Polarisierungen
- Das Picard-Gitter
- Die Periodenabbildung
- Globaler Satz von Torelli
- Der Modulraum Quasi-Polarisierter K3-Flächen

3 Vektorwertige Modulformen, Heegner Divisoren — 22.5 (Darmstadt)
Markus Schwagenscheidt

Inhalt: §§ 4.1, 4.2 und 4.3[1] (teilweise)

[1] Verweise ohne explizite Literaturangabe beziehen sich auf unsere Grundreferenz, den Artikel [13]

- Erinnerung: Definition von vektorwertigen Modulformen, wie sie in der Theorie von Borcherds auftreten (Weil-Darstellung, halbganzes Gewicht). Literatur z.B. [2], [5]
- Definition von Heegner-Divisoren z.B. [5], einige Bemerkungen zur Geometrie des symmetrischen Gebietes ('Periodengebiet') $\mathcal{D}$ und des Quotienten $\mathcal{X}_M$ wären hier ebenfalls notwendig. (siehe evtl. auch [11], § 4)

4 Borcherds' Liftung und die Modularität von Divisoren 22.5 (Darmstadt)
Stephan Ehlen

Inhalt: §§ 4.3 (Rest), 4.4

- Das Ziel ist hier [13], Theorem p. 30:

$$\Phi(q) \in \mathrm{Pic}(\mathcal{X}_M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Mod}(\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z}), 1 + \frac{n}{2}, \rho_M^*).$$

- Mittels Serre-Dualität zeigt Borcherds in [2] (u. [3]) ein Obstruktionsresultat, aus welchem zusammen mit seiner multiplikativer Liftung aus [1] die Modularität bestimmter Divisoren folgt. (Einen analytischen Beweis gibt [5]). Für das obige Theorem muss man noch ein Ergebnis von McGraw [14] dazunehmen.

  Literatur: [1, 2, 3, 14]

5 Noether-Lefschetz für K3 Fläche 5.6 (Frankfurt)
Jonathan Zachhuber

- Hier sollte eine Übersicht über den klassischen Beweis des Satz von Noether und Lefschetz mittels Hodge-Theorie gegeben werden. Literatur: [12] und vielleicht [6]

  (Ein Beweis mit relativ einfachen Mitteln aus der algebraischen Geometrie findet sich in [10].)
- Der Noether-Lefschetz Lokus, Definition der NL-Divisoren $P_{\Delta,\delta}$ und $D_{h,f}$ nach [13] (§§ 0.2, 1)
- Definition der Noether-Lefschetz Zahlen wie in [13] (§ 1.4 – 1.6) und Beweis ihrer Endlichkeit (Prop. 1)
- Vergleich der Heegner Divisoren $y_{n,\gamma}$ und der Noether-Lefschetz Divisoren $D_{b,h}$. (Lemma 3 in [13]) und explizite Bestimmung der NL-Zahlen für K3-Flächen ([13], § 4.4) als Anwendung der Ergebnisse aus Vortrag 4.

Literatur: [12, 13, 6],

6 Gromov-Witten und Gopakumar-Vafa Invarianten 5.6 (Frankfurt)
Patrik Hubschmid

- allgemeine Einführung zur Gromov-Witten Theorie und GV-Invarianten, Definition(en) etc.,

Literatur: [13], § 2.1, [15], sowie [9] und [16]. Evtl. auch [12].

7 Torische Varietäten, eine Einführung 12.6 (Darmstadt)
Priska Jahnke

- Definitionen Torischer Varitäten (Kegel, Fächer, homogene Koordinaten)
- Torische Varietäten und Polytope
- Beispiele

Literatur: [7] (möglicherweise) oder [8], chp. 3

8 Spiegelsymmetrie etc. 12.6 (Darmstadt)
Jethro van Ekeren

Spiegelsymmetrie für Calabi-Yaus, und speziell für die quintischen 3-Mannigfaltigkeit.

Die Spiegelsymmetrie spielt eine wichtige Rolle in §5.3. Es wäre wünschenswert, ein Verständnis der Beweisidee der 'modularen Identität' 5.5, zu vermitteln.
Literatur: [8] chps. 1, 2, auch [12], [11] (?)

9 GW für K3 Flächen, Yau-Zaslow 26.6 (Frankfurt)
Martin Möller

- Anwendung von GW für K3 Flächen
- Die Vermutungen Conjecture 1 und Conjecture 2 in [13] und deren Beziehung zur Yau-Zaslow Vermutung

Literatur: [15] und [12]
Hinweis *Zu Yau-Zaslow siehe letzte Sitzung.*

10 Die Beziehung zwischen NL- und GW-Invarianten 26.6 (Frankfurt)
Jacob Stix

Theorem 1 in [13], vgl. auch [4] Th. 1.2.

11 + 12 Letzte Sitzung **17.7 (Darmstadt)**
NN

Hier bieten sich verschiedene Möglichkeiten, so könnte man sich mit 'NL numbers for pencils of quartics' befassen, Theorem 2 in [13] (§§ 0.7, 5.1 – 5.2), oder weiter mit Yau-Zaslow, etwa nach [12] (und eventuell weiteren noch zu bestimmenden Quellen).

Literatur

[1] Richard E. Borcherds. Automorphic forms with singularities on Grassmannians. *Invent. Math.*, 132(3):491–562, 1998.

[2] Richard E. Borcherds. The Gross-Kohnen-Zagier theorem in higher dimensions. *Duke Math. J.*, 97(2):219–233, 1999.

[3] Richard E. Borcherds. Correction to: "The Gross-Kohnen-Zagier theorem in higher dimensions" [Duke Math. J. **97** (1999), no. 2, 219–233; MR1682249 (2000f:11052)]. *Duke Math. J.*, 105(1):183–184, 2000.

[4] Richard E. Borcherds, Ludmil Katzarkov, Tony Pantev, and N. I. Shepherd-Barron. Families of $K3$ surfaces. *J. Algebraic Geom.*, 7(1):183–193, 1998.

[5] Jan H. Bruinier. *Borcherds products on O(2, l) and Chern classes of Heegner divisors*, volume 1780 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[6] James Carlson, Mark Green, Phillip Griffiths, and Joe Harris. Infinitesimal variations of Hodge structure. I. *Compositio Math.*, 50(2-3):109–205, 1983.

[7] David A. Cox. Minicourse on toric varieties. available at `http://www.cs.amherst.edu/~dac/lectures/toric.pdf`, 2001.

[8] David A. Cox and Sheldon Katz. *Mirror symmetry and algebraic geometry*, volume 68 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[9] W. Fulton and R. Pandharipande. Notes on stable maps and quantum cohomology. In *Algebraic geometry—Santa Cruz 1995*, volume 62 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 45–96. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[10] Phillip Griffiths and Joe Harris. On the Noether-Lefschetz theorem and some remarks on codimension-two cycles. *Math. Ann.*, 271(1):31–51, 1985.

[11] D. Huybrechts. Moduli spaces of hyperkähler manifolds and mirror symmetry. *ArXiv e-prints*, 2002, 0210219.

[12] A. Klemm, D. Maulik, R. Pandharipande, and E. Scheidegger. Noether-Lefschetz theory and the Yau-Zaslow conjecture. *ArXiv e-prints*, 2008, 0807.2477.

[13] D. Maulik and R. Pandharipande. Gromov-Witten theory and Noether-Lefschetz theory. *ArXiv e-prints*, 2007, 0705.1653.

[14] William J. McGraw. The rationality of vector valued modular forms associated with the Weil representation. *Mathematische Annalen*, 326:105–122, 2003.

[15] R. Pandharipande. Maps, sheaves and $K3$ surfaces. *ArXiv e-prints*, 2008, 0808.0253.

[16] R. Pandharipande and R. P. Thomas. 13/2 ways of counting curves. *ArXiv e-prints*, 2012, 1111.1552.