Skript zur Vorlesung

Geometrie

Sommersemester 2012
Frankfurt am Main

Prof. Dr. Annette Werner

Inhaltsverzeichnis

1 Bilinearformen

Wir wollen zunächst die mathematischen Grundlagen der Strecken- und Winkelmessung erarbeiten. Dazu brauchen wir den Begriff eines euklidischen Raumes. Wir beginnen mit der Definition bilinearer Abbildungen.

Mit K bezeichnen wir immer einen Körper.

Definition 1.1 *i) Es seien V und W zwei K-Vektorräume. Eine Abbildung*

$$f : V \times W \to K$$

*heißt **bilinear**, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. $f(v_1 + v_2, w) = f(v_1, w) + f(v_2, w)$ *für alle* $v_1, v_2 \in V$ *und* $w \in W$
2. $f(v, w_1 + w_2) = f(v, w_1) + f(v, w_2)$ *für alle* $v \in V$ *und* $w_1, w_2 \in W$.
3. $f(\alpha v, w) = \alpha f(v, w) = f(v, \alpha w)$ *für alle* $\alpha \in K, v \in V$ *und* $w \in W$.

*ii) Ist $V = W$, so nennt man eine bilineare Abbildung $f : V \times V \to K$ auch **Bilinearform** auf V.*

Beispiele:

Es sei $A \in K^{m \times n}$ eine beliebige $(m \times n)$-Matrix. Dann definiert A eine bilineare Abbildung

$$\beta_A : K^m \times K^n \longrightarrow K$$

durch $\beta_A(v, w) = v^t A w$.

1) Ist etwa $A = E_n \in K^{n \times n}$, so ergibt sich die folgende Bilinearform:

$$\begin{array}{rcl} \beta_{E_n} : K^n \times K^n & \longrightarrow & K \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) & \longmapsto & x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n. \end{array}$$

2) Für die Nullmatrix ergibt sich die bilineare Abbildung, die für jeden eingesetzten Wert Null ergibt.

3) Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2 \times 3}$ ergibt sich die bilineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \beta_A : \mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^3 & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) & \mapsto & (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&= (x_1 + x_2 \;\; 2x_1 \;\; 3x_1 + x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\
&= x_1 y_1 + x_2 y_1 + 2x_1 y_2 + 3x_1 y_3 + x_2 y_3
\end{aligned}
$$

Lemma 1.2 *Seien V und W zwei K-Vektorräume und $f : V \times W \to K$ eine Abbildung. Dann ist f genau dann bilinear, falls für alle $v \in V$ die Abbildung*

$$
\begin{aligned}
f(v, -) : W &\to U \\
w &\mapsto f(v, w)
\end{aligned}
$$

linear ist und falls für alle $w \in W$ die Abbildung

$$
\begin{aligned}
f(-, w) : V &\to U \\
v &\mapsto f(v, w)
\end{aligned}
$$

linear ist.

Beweis : Das folgt sofort aus Definition 1.1. □

Wir wollen jetzt jeder bilinearen Abbildung

$$f : V \times W \to K$$

eine Koordinatenmatrix zuordnen.

Definition 1.3 *Es sei $f : V \times W \to K$ eine bilineare Abbildung. Ferner sei $B = (b_1, \ldots, b_m)$ eine Basis von V und $C = (c_1, \ldots, c_n)$ eine Basis von W. Dann heißt die $(m \times n)$-Matrix*

$$\Gamma_{f,B,C} = (f(b_i, c_j))_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$$

***Koordinatenmatrix** von f bezüglich B und C. Der Eintrag von $\Gamma_{f,B,C}$ an der Stelle (i, j) ist also gerade $f(b_i, c_j)$. Manchmal wird $\Gamma_{f,B,C}$ auch **Gram'sche Matrix** genannt.*

Erinnerung: Die Basis B definiert einen Isomorphismus

$$
\begin{aligned}
\kappa_B : V &\to K^m \\
v &\mapsto \kappa_b(v),
\end{aligned}
$$

wobei die Einträge β_i von $\kappa_B(v) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$ durch

$$v = \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_m b_m$$

definiert sind. Analog definiert die Basis C einen Isomorphismus $\kappa_C : W \to K^n$.

Lemma 1.4 *Es sei $f : V \times W \to K$ eine bilineare Abbildung und $B = (b_1, \dots, b_m)$ eine Basis von V sowie $C = (c_1, \dots, c_n)$ eine Basis von W. Dann gilt für alle $v \in V$ und $w \in W$:*

$$f(v,w) = \kappa_B(v)^t \, \Gamma_{f,B,C} \, \kappa_C(w).$$

Beweis : Seien b_i und c_j Vektoren aus den Basen B und C. Dann gilt $\kappa_B(b_i) = e_i$ und $\kappa_C(c_j) = e_i$, wobei $e_i \in K^m$ und $e_j \in K^n$ die entsprechenden Einheitsvektoren sind. Also ist

$$\kappa_B(b_i)^t \, \Gamma_{f,B,C} \, \kappa_C(c_j) = e_i^t \, \Gamma_{f,B,C} \, e_j$$

gerade der Eintrag von $\Gamma_{f,B,C}$ an der Stelle (i,j), d.h. gleich $f(b_i, c_j)$. Sind $v \in V$ und $w \in W$ beliebig, so schreiben wir $v = \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i b_i$ und $w = \sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_j c_j$ mit $\beta_i, \gamma_j \in K$. Also ist $\kappa_B(v) = \sum_{i=1}^m \beta_i e_i$ und $\kappa_C(w) = \sum_{j=1}^n \gamma_j e_j$. Da f bilinear ist, folgt

$$\begin{aligned}
f(v,w) &= f\left(\sum_{i=1}^{m} \beta_i b_i, \sum_{j=1}^{n} \gamma_j c_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \beta_i f(b_i, \sum_{j=1}^{n} \gamma_j c_j) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \beta_i \sum_{j=1}^{n} \gamma_j f(b_i, c_j) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \beta_i \sum_{j=1}^{n} \gamma_j (e_i^t \, \Gamma_{f,B,C} \, e_j) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \beta_i (e_i^t \, \Gamma_{f,B,C} \sum_{j=1}^{n} \gamma_j e_j) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} \beta_i e_i^t\right) \Gamma_{f,B,C} \left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j e_j\right) \\
&= \kappa_B(v)^t \, \Gamma_{f,B,C} \, \kappa_c(w).
\end{aligned}$$

□

Dieses Resultat sagt, dass jede bilineare Abbildung $f : V \times W \to K$ nach Wahl von Basen B von V und C von W durch ihre Koordinatenmatrix beschrieben werden kann. Wir können Lemma 1.4 auch so ausdrücken: Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[d, "\kappa_B \times \kappa_C"'] \arrow[dr, "f"] & \\
 & K \\
K^m \times K^n \arrow[ur, "\beta_{\Gamma_{f,B,B}}"'] &
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ. Hier ist $\beta_{\Gamma_{f,B,C}}$ die durch $\Sigma_{f,B,C}$ induzierte bilineare Abbildung aus dem obigen Beispiel.

Erinnerung: Es seien $B = (b_1, \ldots, b_n)$ und $B' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ zwei Basen des n-dimensionalen Vektorraums V. Dann bezeichnen wir mit $M(B, B')$ die Übergangsmatrix von B' nach B, d.h. $M(B, B')$ hat die Spalten $\kappa_B(b'_1), \ldots, \kappa_B(b'_n)$.

Jetzt wollen wir untersuchen, wie sich die Koordinatenmatrix einer bilinearen Abbildung ändert, wenn man zu anderen Basen übergeht.

Proposition 1.5 *Es sei $f : V \times W \to K$ bilinear und $\dim V = n$, $\dim W = m$. Ferner seien Basen B und B' von V sowie C und C' von W gegeben. Dann gilt*

$$\Gamma_{f,B',C'} = M(B, B')^t \, \Gamma_{f,B,C} \, M(C, C')$$

Beweis : Es sei $B' = (b'_1, \ldots, b'_m)$ und $C' = (c'_1, \ldots, c'_n)$. Dann hat $M(B, B')$ die Spalten $(\kappa_B(b'_1), \ldots, \kappa_B(b'_m))$. Die Matrix $M(C, C')$ hat die Spalten $(\kappa_C(c'_1), \ldots, \kappa_C(c'_n))$. Definitionsgemäß ist der Eintrag von $\Gamma_{f,B',C'}$ an der Stelle (i, j) gerade

$$\begin{aligned} f(b'_i, c'_j) &\overset{1.4}{=} \kappa_B(b'_i)^t \;\; \Gamma_{f,B,C} \;\; \kappa_C(c'_j) \\ &= (i\text{-te Zeile von } M(B, B')^t \; \Gamma_{f,B,C} \; (j\text{-te-Spalte von } M(C, C')) \\ &= \text{ Eintrag an der Stelle } (i, j) \text{ in der Matrix } M(B, B')^t \, \Gamma_{f,B,C} \, M(C, C'). \end{aligned}$$

Also ist in der Tat $\Gamma_{f,B',C'} = (M(B, B'))^t \, \Gamma_{f,B,C} \, M(C, C')$. □

Nun ist jede invertierbare $(m \times m)$-Matrix die Übergangsmatrix von B zu einer anderen Basis von V und jede invertierbare $(n \times n)$-Matrix die Übergangsmatrix von C zu einer anderen Basis von W. Wir können Proposition 1.5 also auch so formulieren: Zwei Matrizen $M, N \in K^{m \times n}$ beschreiben genau dann dieselbe bilineare Abbildung (bezüglich verschiedener Basen), wenn Matrizen $P \in \mathrm{GL}(m, K)$ und $Q \in \mathrm{GL}(n, K)$ existieren mit

$$P^t M Q = N.$$

Definition 1.6 *Sei $f : V \times V \to K$ eine Bilinearform.*

1. *f heißt **symmetrisch**, falls für alle $v, w \in V$ gilt $f(v, w) = f(w, v)$.*
2. *f heißt **schiefsymmetrisch** oder alternierend, falls für alle $v \in V$ gilt $f(v, v) = 0$.*

Im Fall char$(K) \neq 2$ lassen sich schiefsymmetrische Bilinearformen auch anders charakterisieren.

Lemma 1.7 *Sei char$K \neq 2$. Eine Bilinearform $f : V \times V \to K$ ist genau dann schiefsymmetrisch, wenn für alle $v, w \in V$*

$$f(v, w) = -f(w, v)$$

gilt.

Beweis : Ist f schiefsymmetrisch, so gilt für alle $v, w \in V$:

$$0 = f(v+w, v+w) = f(v,v) + f(v,w) + f(w,v) + f(w,w) = f(v,w) + f(w,v),$$

also $f(v,w) = -f(w,v)$. (Dieses Argument funktioniert auch für $\mathrm{char}(K) = 2$.)

Ist umgekehrt $f(v,w) = -f(w,v)$ für alle $v, w \in V$, so folgt $f(v,v) = -f(v,v)$, also $2f(v,v) = 0$. Wegen $\mathrm{char}(K) \neq 2$ folgt $f(v,v) = 0$. □

Definition 1.8 *Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in K^{n \times n}$.*

*A heißt **symmetrisch**, falls $a_{ij} = a_{ji}$ für alle i, j gilt.*

Proposition 1.9 *Sei $f : V \times V \to K$ eine Bilinearform und $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine beliebige Basis von V. Dann ist f genau dann symmetrisch, wenn die Koordinatenmatrix $\Gamma_{f,B,B}$ symmetrisch ist.*

Beweis : Ist f symmetrisch, so gilt

$$(\Gamma_{f,B,B})_{i,j} = f(b_i, b_j) = f(b_j, b_i) = (\Gamma_{f,B,B})_{j,i},$$

also ist $\Gamma_{f,B,B}$ symmetrisch. Ist umgekehrt $\Gamma_{f,B,B}$ symmetrisch, so folgt analog $f(b_i, b_j) = f(b_j, b_i)$ für alle i, j. Für $b = \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i$ und $c = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j b_j$ in V folgt

$$\begin{aligned} f(b,c) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \gamma_j f(b_i, b_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \gamma_j f(b_j, b_i) = f(c,b). \end{aligned}$$

□

Definition 1.10 *Es sei $f : V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform auf V.*

1. *Dann heißen $v, w \in V$ **orthogonal** bezüglich f (wir schreiben $v \perp w$), falls $f(v,w) = 0$ ist.*
2. *Ist $X \subset V$ eine beliebige Teilmenge, so heißt die Menge*

   $$X^{\perp} = \{v \in V : f(x,v) = 0 \text{ für alle } x \in X\}$$

   ***orthogonales Komplement** von X bezüglich f.*
3. *Ist $v \neq 0$ orthogonal zu sich selbst bezüglich f, d.h. gilt $f(v,v) = 0$, so heißt v **isotrop** bezüglich f. Ein Vektor $v \neq 0$, der nicht isotrop ist, heißt **anisotrop** bezüglich f.*

Für jede Teilmenge X von V ist das orthogonale Komplement $X^\perp$ ein Unterraum von V (Übungsaufgabe).

Beispiel: Es sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \right) &\mapsto x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4 \end{aligned}$$

die sogenannte Lorentzform, d.h. $f = \beta_A$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$. Der Vektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ erfüllt $f(v, v) = 0$, d.h. v ist isotrop.

Besitzt f einen isotropen Vektor v, so ist das orthogonale Komplement $\langle V \rangle^\perp$ kein Komplement im Sinne der Unterräume von V, da

$$v \in \langle v \rangle \cap \langle v \rangle^\perp \neq 0$$

gilt.

Proposition 1.11 *Es sei* $\operatorname{char} K \neq 2$. *Eine symmetrische Bilinearform* $f : V \times V \to K$ *mit* $f \neq 0$ *besitzt einen anisotropen Vektor, d.h. es existiert ein* $v \neq 0$ *in* V *mit* $f(v, v) \neq 0$.

Beweis : Ist $f \neq 0$, so gibt es $v, w \in V$ mit $f(v, w) \neq 0$. Falls $f(v, v) \neq 0$ oder $f(w, w) \neq 0$ sind, so folgt die Behauptung. Im Fall $f(v, v) = 0 = f(w, w)$ gilt

$$f(v + w, v + w) = f(v, v) + f(w, w) + 2f(v, w) = 2f(v, w) \neq 0,$$

da $\operatorname{char}(K) \neq 2$. $\square$

Jetzt können wir einen Spezialfall angeben, in dem das orthogonale Komplement ein Komplement im üblichen Sinn ist.

Proposition 1.12 *Es sei* $f : V \times V \to K$ *eine symmetrische Bilinearform und* $v \in V$ *anisotrop bezüglich* f. *Dann gilt* $V = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^\perp$.

Beweis : Wir zeigen zunächst $\langle v \rangle \cap \langle v \rangle^\perp = 0$. Ist für $a \in K$ der Vektor $av \in \langle v \rangle \cap \langle v \rangle^\perp$, so folgt $0 = f(v, av) = af(v, v)$. Da v anisotrop ist, gilt $f(v, v) \neq 0$, also $a = 0$, und somit $av = 0$.

Nun zeigen wir $\langle v \rangle + \langle v \rangle^\perp = V$. Sei $w \in V$. Wir setzen $a := \frac{f(v,w)}{f(v,v)}$ und schreiben $w = (w - av) + av$. Es ist $f(w - av, v) = f(w, v) - af(v, v) = 0$, woraus $w - av \in \langle v \rangle^\perp$ folgt. Also liegt $w = (w - av) + av \in \langle v \rangle^\perp + \langle v \rangle$. $\square$

Definition 1.13 *Eine symmetrische Bilinearform f auf V heißt* ***nicht ausgeartet****, falls für alle $v \in V$ gilt: Ist $f(v,w) = 0$ für alle $w \in V$, so folgt $v = 0$.*

Mit anderen Worten: Nur für den Nullvektor v ist die lineare Abbildung $f(v,-)$ die Nullabbildung. Und noch einmal anders ausgedrückt: Eine Bilinearform f ist genau dann nicht ausgeartet, wenn $V^\perp = 0$ ist.

Da f symmetrisch ist, ist f ferner genau dann nicht ausgeartet, wenn für alle $w \in V$ gilt: Ist $f(v,w) = 0$ für alle $v \in V$, so folgt $w = 0$.

Wir können diese Eigenschaft wie folgt an der Koordinatenmatrix von f ablesen:

Satz 1.14 *Es sei $f : V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform auf V und $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V.*

1. *Dann gilt*
$$V^\perp = \{v \in V : \Gamma_{f,B,B}\, \kappa_B(v) = 0\}.$$
Im orthogonalen Komplement von V sind also genau diejenigen Vektoren, deren Koordinatenmatrix im Kern der durch Multiplikation mit $\Gamma_{f,B,B}$ gegebenen linearen Abbildung liegt. Wir können $V^\perp$ daher durch Lösen eines linearen Gleichungssystems bestimmen.

2. *f ist genau dann nicht ausgeartet, wenn $\Gamma_{f,B,B}$ invertierbar ist.*

Beweis :

1. Wir zeigen $V^\perp = \{v \in V : \Gamma_{f,B,B}\, \kappa_B(v) = 0\}$.
„$\supset$“: Ist $\Gamma_{f,B,B}\, \kappa_B(v) = 0$, so gilt nach Lemma 1.4 für alle $w \in V$:
$$f(w,v) = \kappa_B(w)^t\, \Gamma_{f,B,B}\, \kappa_B(v) = 0,$$
also ist $v \in V^\perp$.
„$\subset$“: Angenommen, $v \in V^\perp$. Dann gilt für alle $w \in V$
$$0 = f(w,v) \overset{1.4}{=} \kappa_B(w)^t\, \Gamma_{f,B,B}\, \kappa_B(v).$$
Der Vektor $x = \Gamma_{f,B,B}\, \kappa_B(v) \in K^n$ hat also die Eigenschaft, dass für alle $y \in K^n$
$$y^t\, x = 0$$
gilt. Indem wir für y die Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_n$ einsetzen, sehen wir, dass alle Einträge von $x = \Gamma_{f,B,B}\, \kappa(v)$ verschwinden. Also folgt $\Gamma_{f,B,B}\, \kappa_B(v) = 0$.

2. f ist genau dann nicht ausgeartet, wenn $V^\perp = 0$ ist, nach i) also genau dann, wenn aus $\Gamma_{f,B,B}\, \kappa_B(v) = 0$ schon $v = 0$ folgt. Da $\kappa_B : V \to K^n$ ein Isomorphismus ist, ist das äquivalent dazu, dass der Kern der Abbildung
$$\begin{aligned} K^n &\to K^n \\ x &\mapsto \Gamma_{f,B,B}\, x \end{aligned}$$
gleich 0 ist, also zu der Tatsache, dass $\Gamma_{f,B,B}$ invertierbar ist.

□

Beispiel:

1. Die Lorentzform $f = \beta_A, A = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$ ist nicht-ausgeartet.

2. Die symmetrische Bilinearform

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 &\to \mathbb{C} \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) &\mapsto x_1y_1 + ix_2y_1 + ix_1y_2 - x_2y_2 \end{aligned}$$

   ist ausgeartet, da

$$\det \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} = 0$$

   gilt.

Definition 1.15 *Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f : V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform. Eine Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ heißt* ***Orthogonalbasis von V*** *bezüglich f, falls für alle $i \neq j \quad b_i \perp b_j$ (d.h. $f(b_i, b_j) = 0$) gilt. Also ist B genau dann eine Orthogonalbasis bezüglich f, wenn $\Gamma_{f,B,B}$ eine Diagonalmatrix ist.*

Ist B eine Orthogonalbasis, so können wir leicht prüfen, ob f nicht ausgeartet ist. Nach Satz 1.14 ist f nämlich genau dann nicht ausgeartet, wenn die Diagonalmatrix $\Gamma_{f,B,B}$ invertierbar ist, d.h. wenn alle Diagonalelemente $f(b_i, b_i)(i = 1, \dots, n)$ dieser Matrix ungleich Null sind.

Satz 1.16 *Sei char $K \neq 2$. Jede symmetrische Bilinearform $f : V \times V \to K$ auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V besitzt eine Orthogonalbasis.*

Beweis : Ist $f = 0$, so ist jede beliebige Basis von V eine Orthogonalbasis. Wir können also $f \neq 0$ annehmen. Wir zeigen die Behauptung mit Induktion nach der Dimension von V. Für $\dim V = 1$ ist jede Basis von V eine Orthogonalbasis. Also nehmen wir an, die Behauptung gilt für alle symmetrischen Bilinearformen auf Vektorräumen der Dimension $< \dim V$. Nach Proposition 1.11 besitzt f einen anisotropen Vektor v, und nach Proposition 1.12 ist $V = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^\perp$. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt der Vektorraum $\langle v \rangle^\perp$ zusammen mit der Einschränkung von f auf $\langle v \rangle^\perp \times \langle v \rangle^\perp$ eine Orthogonalbasis $(b_2, \dots, b_n)$. Da $f(v, b_i) = 0$ für alle $i = 2, \dots, n$ gilt, ist $(v, b_2, \dots, b_n)$ eine Orthogonalbasis von V bezüglich f. □

Korollar 1.17 *Sei $A \in K^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann existiert ein $P \in GL_n(K)$, so dass P^tAP eine Diagonalmatrix ist.*

Beweis : Ist A symmetrisch, so ist $\beta_A : K^n \times K^n \to K$ eine symmetrische Bilinearform. Nach Satz 1.16 gibt es eine Orthogonalbasis B von K^n bezüglich β_A, d.h. $\Gamma_{\beta_A,B,B}$ ist eine Diagonalmatrix. Ist C die kanonische Basis von K^n, so ist $\Gamma_{f,C,C} = A$. Für die Übergangsmatrix $M(C, B) \in \mathrm{GL}_n(K)$ gilt daher nach Proposition 1.5 $\Gamma_{f,B,B} = P^t\, A\, P$, woraus die Behauptung folgt. □

2 Euklidische Vektorräume

Wir betrachten in diesem Kapitel Vektorräume über dem Grundkörper $K = \mathbb{R}$. Hier führen wir Skalarprodukte ein, mit deren Hilfe man Strecken und Winkel messen kann.

Definition 2.1 *i) Eine symmetrische Bilinearform $f : V \times V \to \mathbb{R}$ auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V heißt* ***positiv definit****, wenn für alle $v \neq 0$ aus V die Ungleichung $f(v,v) > 0$ gilt.*

Eine positiv definite symmetrische Bilinearform auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V nennt man auch ***Skalarprodukt*** *auf V.*

ii) Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt ***positiv definit****, falls $\beta_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ positiv definit ist, d.h. falls für alle $x \neq 0$ aus $\mathbb{R}^n$ die Ungleichung $x^tAx > 0$ gilt.*

Beispiel: Eine Diagonalmatrix $A = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann positiv definit, wenn alle Diagonaleinträge $d_i > 0$ sind.

Für $A = E_n$ heißt die positiv definite symmetrische Bilinearform

$$\begin{array}{rcl} \langle\, , \,\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) & \mapsto & x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \end{array}$$

kanonisches Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

Lemma 2.2 *Eine symmetrische Bilinearform f auf dem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V ist genau dann positiv definit, wenn es eine Basis B von V gibt, so dass die Koordinatenmatrix $\Gamma_{f,B,B}$ positiv definit ist. In diesem Fall ist für jede beliebige Basis B von V die Koordinatenmatrix $\Gamma_{f,B,B}$ positiv definit.*

Beweis : Es sei B eine beliebige Basis von V. Es ist $f(v,v) = \kappa_B(v)^t\,\Gamma_{f,B,B}\,\kappa_B(v)$ nach Lemma 1.4. Da $\kappa_B : V \to \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus ist, ist f genau positiv definit, wenn $\Gamma_{f,B,B}$ positiv definit ist. □

Definition 2.3 *Es sei $f : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ von V heißt* ***Orthonormalbasis*** *von V bezüglich f, falls*

$$f(b_i, b_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

gilt.

Eine Basis B ist also genau dann eine Orthonormalbasis von V bezüglich f, wenn $\Gamma_{f,B,B} = E_n$ gilt. Existiert eine Orthonormalbasis von V bezüglich f, dann ist f offenbar positiv definit. Wir zeigen nun, dass auch die Umkehrung gilt.

Satz 2.4 *Ist f eine positiv definite symmetrische Bilinearform auf dem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V, so gibt es eine Orthonormalbasis von V bezüglich f.*

Beweis : (mit Hilfe des sogenannten **Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahrens**) Wir wählen eine beliebige Basis $C = (c_1, \ldots, c_n)$ von V und konstruieren daraus eine Orthonormalbasis. Da f positiv definit ist, ist $f(c_1, c_1) > 0$, also existiert eine reelle Quadratwurzel von $f(c_1, c_1)$, und es gilt für $b_1 = \frac{1}{\sqrt{f(c_1,c_1)}} c_1$ die Gleichung $f(b_1, b_1) = 1$.

Als nächsten Schritt suchen wir einen Vektor $b_2' \in \langle b_1, c_2\rangle$ mit $b_1 \perp b_2'$. Der Ansatz $b_2' = \alpha_1 b_1 + c_2$ liefert $f(b_1, b_2') = \alpha_1 f(b_1, b_1) + f(b_1, c_2) = \alpha_1 + f(b_1, c_2)$. Also gilt für

$$\alpha_1 = -f(b_1, c_2) \in \mathbb{R},$$

dass der Vektor $b_2' = \alpha_1 b_1 + c_2$ orthogonal zu b_1 ist. Offenbar gilt $\langle b_1, b_2'\rangle = \langle b_1, c_2\rangle = \langle c_1, c_2\rangle$. Wir setzen wieder $b_2 = \frac{1}{\sqrt{f(b_2' b_2')}} b_2'$ und erhalten so ein Paar(b_1, b_2) von Vektoren in V, dessen lineare Hülle mit der linearen Hülle von c_1 und c_2 übereinstimmt und das zusätzlich $f(b_i, b_j) = \delta_{ij}$ für $i = 1, 2$ erfüllt. So fahren wir fort. Sind Vektoren $(b_1, \ldots, b_k)$ mit $\langle b_1, \ldots, b_k\rangle = \langle c_1, \ldots, c_k\rangle$ und $f(b_i, b_j) = \delta_{ij}$ gefunden, so sei

$$\alpha_1 = -f(b_1, c_{k+1}), \ldots, \alpha_k = -f(b_k, c_{k+1}).$$

Der Vektor $b_{k+1}' = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_k b_k + c_{k+1}$ erfüllt dann

$$\begin{aligned} f(b_i, b_{k+1}') &= f(b_i, \sum_{j=1}^{k} \alpha_j b_j) + f(b_i, c_{k+1}) \\ &= \alpha_i + f(b_i, c_{k+1}) = 0. \end{aligned}$$

Mit $b_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{f(b_{k+1}', b_{k+1}')}} b_{k+1}'$ erhalten wir ein System $(b_1, \ldots, b_{k+1})$ von Vektoren, so dass $\langle b_1, \ldots, b_{k+1}\rangle = \langle c_1, \ldots, c_{k+1}\rangle)$ und $f(b_i, b_j) = \delta_{ij}$ gilt. Sind alle c_i verbraucht, so haben wir eine Orthonormalbasis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ gefunden. □

Dieses Resultat wollen wir noch für Matrizen umformulieren.

Satz 2.5 *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann sind äquivalent.*

i) Es gibt eine Basis B von $\mathbb{R}^n$ mit $A = \Gamma_{\langle,\rangle,B,B}$, wobei $\langle,\rangle$ das kanonische Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ ist.

ii) Es gibt ein $P \in GL(n, \mathbb{R})$ mit $A = P^t P$.

iii) A ist symmetrisch und positiv definit.

Beweis : i) $\Rightarrow$ iii) folgt aus 1.9 und Lemma 2.2.

iii) $\Rightarrow$ ii) Wir wenden Satz 2.4 auf die positiv definite symmetrische Bilinearform $\beta_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an. Es gibt also eine Orthonormalbasis B von $\mathbb{R}^n$ bezüglich β_A, d.h. $\Gamma_{\beta_A,B,B} = E_n$. Es sei C die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$. Dann gilt nach Proposition 1.5: $A = \Gamma_{\beta_A,C,C} = M(B,C)^t\, E_n\, M(B,C) = M(B,C)^t\, M(B,C)$.

ii) $\Rightarrow$ i): Es sei $C = (e_1, \ldots, e_n)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$. Es gibt eine Basis B von $\mathbb{R}^n$ mit $M(C,B) = P$ (Übungsaufgabe aus der linearen Algebra). Daraus folgt

$$\begin{aligned} \Gamma_{\langle,\rangle,B,B} &\overset{1.5}{=} P^t\, \Gamma_{\langle,\rangle,C,C}\, P \\ &= P^t\, P = A. \end{aligned}$$

$\square$

Wir wollen jetzt noch ein Kriterium zeigen, mit dem man feststellen kann, ob eine Matrix positiv definit ist.

Definition 2.6 *Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Es sei*

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times k}$$

die obere linke $k \times k$-Untermatrix von A. Die Werte $\det A_1, \det A_2, \ldots, \det A_n = \det A$ *heißen **Hauptminoren von A**.*

Beispiel: Für $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ sind $\det A_1 = -1, \det A_2 = \det A = 1$ die Hauptminoren.

Satz 2.7 *Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann positiv definit, wenn alle Hauptminoren positiv sind, d.h. wenn* $\det A_k > 0$ *für $k = 1, \ldots, n$ gilt.*

Beweis : Angenommen, A ist positiv definit. Dann gibt es nach Satz 2.5 ein $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ mit $A = P^t\, P$. Daher ist $\det A = \det(P^t P) = (\det P)^2 > 0$.

Für alle $k \geq 1$ sei V_k der von den ersten k Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_k$ aufgespannte Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Die Matrix A definiert eine positiv definite symmetrische Bilinearform β_A auf $\mathbb{R}^n$. Auch ihre Einschränkung $\beta_{A|V_k}$ auf V_k ist positiv definit. Die Koordinatenmatrix von $\beta_{A|V_k}$ bezüglich $e_1, \ldots, e_k$ ist gerade A_k. Also gilt $\det A_k > 0$.

Wir nehmen umgekehrt an, alle Hauptminoren von A seien positiv und zeigen mit Induktion nach n, dass A dann positiv definit ist. Für $n = 1$ ist das klar. Also können wir annehmen, dass die Matrix A_{n-1}, deren Hauptminoren gerade $A_1, \ldots, A_{n-1}$ sind, positiv definit ist. Nach Satz 2.5 gibt es dann ein $Q \in \mathrm{GL}(n-1, \mathbb{R})$ mit $Q\, A_{n-1}\, Q^t = E_{n-1}$. Es sei

$\tilde{P} = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Es ist $\tilde{P}\, A\tilde{P}^t = \begin{pmatrix} E_{n-1} & * \\ * & * \end{pmatrix}$. Durch $(n-1)$ elementare Zeilenumformungen, also Multiplikation mit Elementarmatrizen $L_{n-1}, \ldots, L_1$ von links, kann man die ersten $(n-1)$-Einträge der letzten Zeile eliminieren. Da $\tilde{P}A\tilde{P}^t$ symmetrisch ist, kann man mit den analogen Spaltenoperationen, also durch Multiplikation mit $L_1^t, \ldots, L_{n-1}^t$ von rechts, die ersten $(n-1)$ Einträge der letzte Spalte eliminieren. Für $P = L_{n-1} \cdots L_1 \tilde{P}$ gilt also $PAP^t = \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Aus $\det A > 0$ folgt $c > 0$. Somit ist PAP^t positiv definit, woraus mit Lemma 2.2 auch A positiv definit folgt. □

Definition 2.8 *Ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum V mit einer positiv definiten, symmetrischen Bilinearform $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt auch **euklidischer Vektorraum**.*

Beispiel: Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ zusammen mit dem kanonischen Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ ist ein euklidischer Vektorraum.

Definition 2.9 *Ist $(V, \langle , \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, so können wir für alle $v \in V$ eine Länge*

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

definieren.

Definition 2.10 *Eine Abbildung $||\,||: V \to \mathbb{R}$ heißt Norm auf V, falls gilt*

i) Für alle $v \in V$ ist $||v|| \geq 0$, wobei $||v|| = 0$ genau dann gilt, wenn $v = 0$.

ii) Für alle $a \in \mathbb{R}$ und $v \in V$ gilt $||av|| = |a|\ ||v||$.

*iii) Für alle $v, w \in V$ ist $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$ (**Dreiecksungleichung**)*

Lemma 2.11 *Es sei $(V, \langle , \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Dann ist die Abbildung $v \mapsto ||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ eine Norm auf V, die zusätzlich die sogenannte Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung*

iv) Für alle $v, w \in V$ ist $|\langle v, w \rangle| \leq ||v||\ ||w||$

erfüllt.

Beweis :

i) Offenbar ist $||v|| \geq 0$ und es gilt $||v|| = 0 \Leftrightarrow \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$, da $\langle , \rangle$ positiv definit ist.

ii) Es ist $\langle av, av\rangle = a^2\langle v, v\rangle$, woraus mit $\sqrt{a^2} = |a|$ die Behauptung folgt.

iii) folgt aus iv), denn es gilt

$$\begin{aligned} ||v+w||^2 &= \langle v+w, v+w\rangle = \langle v,v\rangle + 2\langle v,w\rangle + \langle w,w\rangle \\ &= ||v||^2 + 2\langle v,w\rangle + ||w||^2 \\ &\leq ||v||^2 + 2|\langle v,w\rangle| + ||w||^2 \\ &\overset{\text{(iv)}}{\leq} ||v||^2 + 2||v||\,||w|| + ||w||^2 = (||v|| + ||w||)^2. \end{aligned}$$

iv) Es sei $W = \langle v, w\rangle \subset V$. Die Einschränkung von $\langle\ ,\ \rangle$ auf W ist ebenfalls eine positiv definite, symmetrische Bilinearform (also ein Skalarprodukt) $\langle\ ,\ \rangle_W$ auf W.

Ist $\dim W = 1$, so können wir $v = \lambda w$ für ein $\lambda \in K$ annehmen. Dann gilt

$$|\langle v, w\rangle| = |\lambda|\, ||w||^2 = ||v||\, ||w||,$$

also stimmt unsere Behauptung.

Ist $\dim W = 2$, so ist (v, w) eine Basis von W. Die Koordinatenmatrix der Bilinearform $\langle\ ,\ \rangle$ bezüglich dieser Basis ist

$$A = \begin{pmatrix} \langle v,v\rangle & \langle v,w\rangle \\ \langle v,w\rangle & \langle w,w\rangle \end{pmatrix}.$$

Nach Lemma 2.2 ist A positiv definit, also ist nach Satz 2.7

$$\det A = \langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2 > 0.$$

Es folgt also $||v||^2\, ||w||^2 > \langle v,w\rangle^2$, und daher $||v||\, ||w|| > |\langle v,w\rangle|$.

□

Mit Hilfe der Norm auf einem euklidischen Vektorraum kann man den Abstand von zwei Vektoren v und w als $||v - w||$ definieren. In einem euklidischen Vektorraum kann man also wie gewohnt Längen und Abstände messen. Jetzt wollen wir noch Winkel in euklidischen Vektorräumen definieren. Dazu benutzen wir folgende elementargeometrische Beschreibung des Winkels zwischen zwei Vektoren in der Koordinatenebene $\mathbb{R}^2$.

Lemma 2.12 *Es sei Δ ein Dreieck in der Koordinatenebene $\mathbb{R}^2$ mit den Seitenlängen a, b und c, und γ sei der der Seite c gegenüberliegende Winkel. Dann gilt*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Beweis :

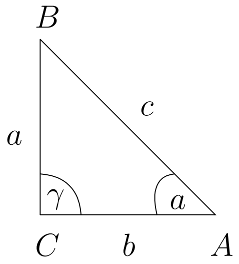
i) Wir betrachten zunächst den Spezialfall $\gamma = 90°$. Hier ist $\cos\gamma = 0$, und unsere Behauptung ist der bekannte Satz des Pythagoras. Wir betrachten also

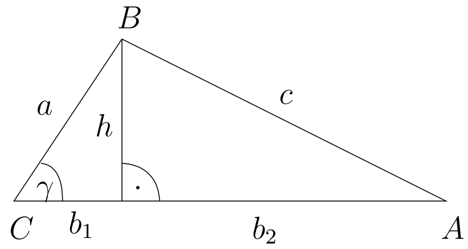
wobei a, b, c die Seitenlängen bezeichnen, und erinnern daran, dass

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \text{ und } \sin\alpha = \frac{a}{c}$$

ist. Aus $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ folgt unsere Behauptung

$$c^2 = b^2 + a^2.$$





,

ii) Nun nehmen wir $\gamma < 90^\circ$ an. Dann ist $\triangle$ von der Form

wobei h die Länge der Höhe in der Ecke B ist und $b_1 + b_2 = b$ gilt.

Wir wenden das Ergebnis im Fall i) auf die beiden rechtwinkligen Teildreiecke an und erhalten

$$\begin{aligned} a^2 &= b_1^2 + h^2 \text{ und} \\ c^2 &= b_2^2 + h^2. \end{aligned}$$

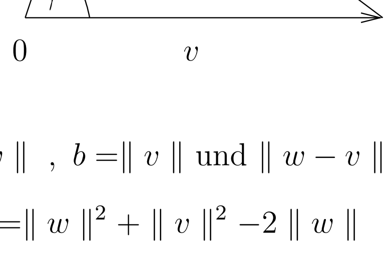
Ferner gilt $\cos\gamma = \frac{b_1}{a}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} c^2 &= b_2^2 + h^2 \\ &= (b - b_1)^2 + h^2 \\ &= b^2 - 2bb_1 + b_1^2 + h^2 \\ &= b^2 + a^2 - 2bb_1 \\ &= b^2 + a^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned}$$

iii) Ist $\gamma > 90^\circ$, so argumentiert man analog zu Fall ii) (Übungsaufgabe).

□

Sind zwei Vektoren v und w in der Ebene gegeben, die den Winkel $\gamma < 180^\circ$ aufspannen, so können wir sie zu einem Dreieck ergänzen,



dessen Seitenlängen $a = \| w \|$, $b = \| v \|$ und $\| w - v \|$ sind. Aus Lemma 2.12 folgt

$$\| w - v \|^2 = \| w \|^2 + \| v \|^2 - 2 \| w \| \; \| v \| \cos\gamma.$$

$$\begin{aligned} \text{Mit } \| w - v \|^2 &= \langle w - v, w - v \rangle \\ &= \langle w, w \rangle - 2\langle v, w \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \| w \|^2 + \| v \|^2 - 2\langle v, w \rangle \end{aligned}$$

folgt

$$\| w \| \quad \| v \| \cos \gamma = \langle v, w \rangle,$$

also $\cos \gamma = \frac{\langle v,w \rangle}{\|v\| \quad \|w\|}.$ Daher definieren wir jetzt analog in einem beliebigen euklidischen Vektorraum:

Definition 2.13 *Sei $(V, \langle , \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und sei $\gamma \in [0, \pi]$ die (eindeutig bestimmte) Zahl mit*

$$\cos \gamma = \frac{\langle v, w \rangle}{\| v \| \quad \| w \|}.$$

Dann heißt γ (nicht-orientierter) Winkel zwischen v und w.

Da $\cos \gamma$ für das Intervall $[0, \pi]$ bijektiv nach $[-1, 1]$ abbildet und da nach der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung Lemma 2.11 iv)

$$-1 \leqq \frac{\langle v, w \rangle}{\| v \| \quad \| w \|} \leqq 1$$

ist, ist γ wohldefiniert.

3 Affine Räume

In der Geometrie des Anschauungsraumes möchte man auch Geraden betrachten, die nicht durch den Nullpunkt gehen, also keine Untervektorräume sind. Solche Geraden nennen wir affin. Genauer gesagt, definieren wir in einem K-Vektorraum V:

Definition 3.1 *Wir nennen jede Teilmenge von V der Form*

$$M = a + W,$$

wobei $a \in V$ und $W \subset V$ ein Untervektorraum ist, einen ***affinen Unterraum****.*

Hier schreiben wir $a + W$ für die Teilmenge $\{a + w : w \in W\}$ von V.

In der affinen Geometrie vergisst man also gewissermaßen einfach die Tatsache, dass der Vektorraum V ein Nullelement besitzt.

Lemma 3.2 *Ist $M = a + W$ ein affiner Unterraum von V, so gilt für jedes Element $b \in M$:*

$$M = b + W = \{b + w : w \in W\}.$$

Der Vekorraum W lässt sich nach Wahl eines Vektors $b \in M$ beschreiben als

$$W = \{v - b : v \in M\}.$$

Wir nennen W den Vektorraum des affinen Raums M. Es gilt $a + W = b + W'$ genau dann, wenn $W = W'$ und $a - b \in W$ ist.

Beweis : Es sei $M = a + W$ ein affiner Unterraum und $b \in M$. Dann lässt sich b schreiben als $b = a + w$ für ein $w \in W$, also folgt $(b - a) \in W$. Also gilt für jedes $w \in W$:

$$a + w = b + (a - b) + w \in b + W \quad \text{und} \quad b + w = a + (b - a) + w \in a + W,$$

woraus $a + W = b + W$ folgt. Daraus folgt für jedes $b \in M$, dass $W = \{v - b : v \in M\}$ gilt.

Gilt $a + W = b + W'$, so ist $a = a + 0$ ein Element dieser Teilmenge. Also folgt $W = \{v - a : v \in a + W\} = \{v - a : v \in b + W'\} = W'$ und $a - b \in W' = W$. □

Aus Lemma 3.2 folgt, dass der Untervektorraum W durch M eindeutig bestimmt ist. Wir definieren die **Dimension** des affinen K-Vektorraums M als Dimension des zugehörigen Untervektorraums W. Affine Unterräume der Dimension eins nennen wir **affine Geraden**, affine Unterräume der Dimension zwei heißen auch **affine Ebenen**.

Definition 3.3 *Seien x, y zwei Punkte in V. Ist $x \neq y$, so ist die Menge*

$$M = x + \langle y - x \rangle = \{x + v : v \in \langle y - x \rangle\} = \{x + \lambda(y - x) : \lambda \in K\}$$

*ein eindimensionaler affiner Unterraum von V, den wir **affine Gerade durch x und y** nennen.*

Im Gegensatz zu Untervektorräumen, die alle den Punkt 0 enthalten, können affine Unterräume auch disjunkt sein. (Übungsaufgabe: Finden Sie ein Beispiel, bevor Sie weiterlesen.)

Definition 3.4

1. *Zwei affine Unterräume M_1, M_2 von V mit zugehörigen Vektorräumen W_1, W_2 heißen **parallel** $(M_1||M_2)$, falls $W_1 = W_2$ gilt.*
2. *M_1 und M_2 heißen **schwach parallel** $(M_1 \lhd M_2)$, falls $W_1 \subset W_2$ gilt.*

Proposition 3.5 *Seien $M_1 = a_1 + W_1$ und $M_2 = a_2 + W_2$ affine Unterräume von V.*

1. *Ist $M_1||M_2$, so ist $M_1 = M_2$ oder $M_1 \cap M_2 = \emptyset$.*
2. *Ist $M_1 \lhd M_2$, so ist $M_1 \subset M_2$ oder $M_1 \cap M_2 = \emptyset$.*

Beweis : Ist $M_1 \lhd M_2$ und $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$, so sei $a \in M_1 \cap M_2$. Dann ist nach Lemma 3.2 $M_1 = a + W_1$ und $M_2 = a + W_2$. Aus $W_1 \subset W_2$ folgt also $M_1 \subset M_2$, aus $W_1 = W_2$ folgt $M_1 = M_2$. □

Definition 3.6 *Es seien Vektorräume V und W. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt* ***affine Abbildung*** *oder* ***affin linear****, falls es eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$ und ein $a \in W$ gibt, so dass*

$$f(v) = \phi(v) + a$$

gilt.

Wir bezeichnen die lineare Abbildung ϕ zu einer affinen Abbildung $f : V \to W$ in Zukunft auch mit ϕ_f.

Satz 3.7 *Es sei $f : V \to W$ eine affine Abbildung und $M_1 = a_1 + W_1$ sowie $M_2 = a_2 + W_2$ affine Unterräume von V Dann gilt:*

i) Sei $w \in W$. Dann ist die Menge $\{v \in V : f(v) = w\}$ entweder leer oder ein affiner Unterraum von V mit Vektorraum Kern ϕ_f.

ii) $f(M_1)$ ist ein affiner Unterraum von W mit Vektorraum $\phi_f(W_1)$.

iii) f bildet die affine Gerade durch zwei verschiedene Punkte x und y in V auf die affine Gerade durch $f(x)$ und $f(y)$ in W ab, falls $f(x) \neq f(y)$ gilt, und auf $f(x)$, falls $f(x) = f(y)$ gilt.

(iv) Ist $M_1 || M_2$ bzw. $M_1 \lhd M_2$, so ist auch $f(M_1) || f(M_2)$ bzw. $f(M_1) \lhd f(M_2)$.

Beweis : i) Die affine Abbildung f ist von der Form $f(v) = \phi_f(v) + a$ für ein $a \in W$ und eine lineare Abbildung $\phi_f : V \to W$. Also ist $f(v) = w$ genau dann, wenn $\phi_f(v) = w - a$ gilt. Wir nehmen an, dass die Menge $\{v \in V : f(v) = w\}$ nicht leer ist. Dann existiert ein $v \in V$ mit $\phi_f(v) = w - a$. Für jedes Element v' mit $f(v') = w$ folgt also $\phi_f(v') = w - a = \phi_f(v)$, also ist $v' - v \in$ Kern ϕ_f. Ist umgekehrt ein Element $v' \in$ Kern ϕ_f gegeben, so ist $f(v + v') = \phi_f(v + v') + a = \phi_f(v) + a = w$. Also gilt

$$\{v' \in V : f(v') = w\} = v + \text{Kern } \phi_f,$$

d.h. die Menge auf der linken Seite ist ein affiner Unterraum.

ii) Ist $M_1 = a_1 + W_1$, so gilt für $f(v) = \phi_f(v) + b$, dass $f(M_1) = \phi_f(a_1) + \phi_f(W_1) + b = f(a_1) + \phi_f(W_1)$, also ein affiner Unterraum von W ist.

iii) Es ist $L(x, y) = x + \langle y - x \rangle$, nach ii) gilt also

$$\begin{aligned} f(L(x,y)) &= \phi_f(\langle y - x \rangle) + f(x) \\ &= \langle \phi_f(y) - \phi_f(x) \rangle + f(x) \end{aligned}$$

Falls $f(x) \neq f(y)$, so ist dies $L(f(x), f(y))$. Falls $f(x) = f(y)$, so folgt $f(L(x, y)) = \{f(x)\}$.

iv) Übungsaufgabe □

Wir betrachten jetzt noch die Menge

$$\mathrm{GA}(V) = \{f : V \to V \quad \text{bijektive affine Abbildung}\}$$

der bijektiven affinen Selbstabbildungen von V.

Lemma 3.8 *$GA(V)$ ist eine Gruppe bezüglich der Komposition von Abbildungen.*

Beweis : Offenbar ist die Identität ein neutrales Element in GA(V). Es sei $f(v) = \phi_f(v)+a$ eine bijektive affine Abbildung. Für jedes Element v im Kern von ϕ_f ist $f(v) = a$. Aus der Injektivität von f folgt also Kern $\phi_f = 0$. Daher ist ϕ_f eine invertierbare lineare Abbildung. Die affine Abbildung $f^{-1} : V \to V$, definiert durch $f^{-1}(v) = \phi_f^{-1}(v) - \phi_f^{-1}(a)$ ist eine Umkehrabbildung von f, wie man leicht nachrechnet. □

Man kann ferner zeigen, dass die Abbildung $f \mapsto \phi_f$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus von $GA(V)$ nach $GL(V)$ ist, dessen Kern die Gruppe der sogenannten Translationsabbildungen $t_a(v) = a + v$ für $a \in V$ ist. Mit etwas mehr Gruppentheorie folgt daraus, dass $GA(V)$ isomorph zum semidirekten Produkt von V mit $GL(V)$ ist.

Jetzt betrachten wir den Vektorraum$V = \mathbb{R}^3$ und studieren verschiedene Beschreibungen affiner Ebenen. Ist W ein zweidimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^3$ und $a \in \mathbb{R}^3$, so ist

$$E = a + W$$

eine affine Ebene im $\mathbb{R}^3$.

Definition 3.9 *Wir definieren den Abstand von $E = a + W$ zum Punkt $b \in \mathbb{R}^3$ als*

$$d(E, b) = \min\{\| v - b \| : v \in E\}$$

Offenbar gilt für die affine Ebene $E' = (a - b) + W$

$$d(E', 0) = d(E, b).$$

Ein Vektor n aus dem eindimensionalen orthogonalen Komplement $W^\perp$ heißt auch **Normalenvektor** an W. Ist $\| n \| = 1$, so heißt n **Einheitsnormalenvektor**. Es gibt genau zwei Einheitsnormalenvektoren an W, sie unterscheiden sich um ein Vorzeichen.

Für jeden zweidimensionalen Untervektorraum W von V gilt $V = W \oplus w^\perp$. Also können wir jedes $v \in V$ als $v = w+\alpha n$ mit einem $w \in W, \alpha \in K$ und einem Einheitsnormalenvektor n schreiben.

Lemma 3.10 *Ist $E = a + W$ eine affine Ebene im $\mathbb{R}^3$ und $b \in \mathbb{R}^3$, so sei n ein Einheitsnormalenvektor an W. Wir schreiben $a - b = w_0 + \alpha n$ für ein $w_0 \in W$ und ein $\alpha \in K$. Dann gilt $d(E, b) =\| \alpha n \| =| \alpha |$.*

Beweis : Für jedes $w \in W$ gilt

$$\begin{aligned} \| (a-b)+w \| &= \| w_0 + \alpha n + w \| \\ &= \sqrt{\langle w_0 + w + \alpha n, w_0 + w + \alpha n\rangle} \\ &\overset{(w_0+w)\perp n}{=} \| w_0 + w \| + \| \alpha n \| \geqq \| \alpha n \| = | \alpha | \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} d(E,b) &= \min\{\| a-b+w \| : w \in W\} \\ &= | \alpha |, \end{aligned}$$

denn dieses Minimum wird für $w = -w_0 \in W$ angenommen. □

Proposition 3.11 *Für jede affine Ebene $M \subset \mathbb{R}^3$ gibt es eine affine Abbildung*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},$$

so dass $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : f(x) = 0\}$ gilt. Mit anderen Worten: Für jede affine Ebene $M \subset \mathbb{R}^3$ gibt es Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, sodass

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = \delta \right\}$$

gilt. Diese Darstellung heißt auch Koordinatenform der Ebene.

Beweis : Es gelte $M = a + W$ mit einem zweidimensionalen Untervektorraum W von $\mathbb{R}^3$. Wir wählen eine lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit Kern $\phi = W$. (Beispielsweise können wir eine Basis b_1, b_2 von W zu einer Basis b_1, b_2, b_3 von $\mathbb{R}^3$ ergänzen und

$$\phi(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3) = \lambda_3$$

setzen.)

Dann ist

$$\begin{aligned} M = a + W &= \{x \in \mathbb{R}^3 : \phi(x) = \phi(a)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^3 : f(x) = 0\} \end{aligned}$$

für die affine Abbildung $f(x) = \phi(x) - \phi(a)$.

Indem wir $\delta = \phi(a)$ setzen und $(\alpha\beta\gamma)$ als Koordinatenmatrix von ϕ bezüglich der kanonischen Basen nehmen, erhalten wir die zweite Darstellung. □

Proposition 3.12 *Für jede affine Ebene $M = a + W$ im $\mathbb{R}^3$ sei n ein Normaleneinheitsvektor an W mit $\langle n, a\rangle \geqq 0$. Dann gilt für $d = \langle n, a\rangle$:*

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \left\langle n, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle = d \right\}$$

Dies nennt man die Hesse'sche Normalform der affinen Ebene M. Ferner ist $d = d(M, 0)$.

Beweis : Es sei n ein Normaleneinheitsvektor an W. Falls $\langle n, a\rangle \leqq 0$ ist, so ersetzen wir n durch den Normaleneinheitsvektor $-n$. Es gilt für alle $w \in W$

$$\langle n, a + w\rangle = \langle n, a\rangle.$$

Für $d = \langle n, a\rangle \in \mathbb{R}$ folgt also die gewünschte Darstellung. Wir schreiben $a = w_0 + \alpha n$ für ein $w_0 \in W$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\alpha = \langle n, a\rangle = d \geqq 0,$$

also gilt nach Lemma 3.10

$$d(E, 0) = d.$$

□

4 Spektralsatz

Wir betrachten einen endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum $(V, \langle , \rangle)$. Zur Erinnerung: V ist also ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einer positiv definiten symmetrischen Bilinearform $\langle \, , \, \rangle$.

Jetzt betrachten wir lineare Endomorphismen des euklidischen Vektorraums. Ist $f : V \to V$ eine lineare Abbildung, und $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V, so bezeichnen wir mit $M_f(B, B)$ die Koordinatenmatrix von f bezüglich der Basis B. Definitionsgemäß sind die Spalten von $M_f(B, B)$ gerade die Koordinatenvektoren der Bilder der Basisvektoren, also $\kappa_B(f(b_1)), \ldots, \kappa_B(f(b_n))$.

Definition 4.1

*i) Eine lineare Abbildung $f : V \to V$ heißt **Isometrie** (bezüglich $\langle \, , \, \rangle$), falls für alle $v, w \in V$*

$$\langle f(v), f(w))\rangle = \langle v, w\rangle$$

gilt.

*ii) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt **orthogonal**, falls $A^t A = E_n$ gilt.*

Eine Isometrie ist immer injektiv (Übungsaufgabe), also ein Isomorphismus, falls V endlich-dimensional ist. Eine Matrix A ist definitionsgemäß genau dann orthogonal, wenn $\lambda_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Isometrie bezüglich des kanonischen Skalarproduktes ist. Jede orthogonale Matrix A ist invertierbar mit $A^{-1} = A^t$. Also gilt auch $AA^t = E_n$.

Satz 4.2 *Es sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung und B eine Orthonormalbasis von $(V, \langle , \rangle)$. Dann gilt für die Koordinatenmatrix $A = M_f(B, B)$:*

*i) A ist genau dann symmetrisch, wenn $\langle v, f(w)\rangle = \langle f(v), w\rangle$ für alle $v, w \in V$ gilt. Die lineare Abbildung f heißt dann **selbstadjungiert** bezüglich $\langle , \rangle$.*

ii) A ist genau dann orthogonal, wenn $\langle v, w\rangle = \langle f(v), f(w)\rangle$ für alle $v, w \in V$ gilt, also genau dann, wenn f eine Isometrie von $(V, \langle , \rangle)$ ist.

Beweis : Da B eine Orthonormalbasis ist, ist die Koordinatenmatrix von $\langle , \rangle$ bezüglich B die Einheitsmatrix. Nach Lemma 1.4 gilt also $\langle x, y\rangle = \kappa_B(x)^t\kappa_B(y)$ für alle $x, y \in V$.

Ferner gilt $\kappa_B(f(x)) = A\kappa_B(x)$ für alle $x \in V$. Ist x ein Basisvektor, so folgt diese Gleichung aus der Definition der Koordinatenmatrix A. Ein beliebiger Vektor x lässt sich als Linearkombination von Basisvektoren schreiben, daher folgt die gewünschte Gleichung, da beide Seiten linear in x sind.

Diese beiden Tatsachen werden wir in den folgenden Rechnungen häufig verwenden.

i) Ist A symmetrisch, d.h. gilt $A^t = A$, so folgt für alle $v, w \in V$:

$$\begin{aligned}\langle v, f(w)\rangle &= \kappa_B(v)^t\,\kappa_B(f(w))\\ &= \kappa_B(v)^t A\,\kappa_B(w)\\ &= (A\kappa_B(v))^t\kappa_B(w)\\ &= \langle f(v), w\rangle.\end{aligned}$$

Ist umgekehrt f selbstadjungiert bezüglich $\langle\, ,\, \rangle$, so folgt für Elemente der Orthonormalbasis $B = (b_1, \ldots, b_n)$:

$$\langle b_i, f(b_j)\rangle = \langle f(b_i), b_j\rangle,$$

also folgt

$$\begin{aligned}e_i A e_j &= \kappa_B(b_i)^t\,A\,\kappa_B(b_j)\\ &= \kappa_B(b_i)^t\kappa_B(f(b_j))\\ &= \langle b_i, f(b_j)\rangle = \langle f(b_i), b_j\rangle\\ &= \kappa_B(f(b_i))^t\kappa_B(b_j)\\ &= (A\kappa_B(b_i))^t\,\kappa_B(b_j)\\ &= e_i^t\,A^t\,e_j,\end{aligned}$$

woraus $A = A^t$ folgt.

ii) Ist A orthogonal, d.h. gilt $A^t A = E_n$, so folgt für alle $v, w \in V$:

$$\begin{aligned}\langle f(v), f(w)\rangle &= \kappa_B(f(v))^t\,\kappa_B(f(w))\\ &= (A\kappa_B(v))^t\,(A\kappa_B(w))\\ &= \kappa_B(v)^t A^t A\,\kappa_B(w)\\ &= \kappa_B(v)^t\,\kappa_B(w) = \langle v, w\rangle.\end{aligned}$$

Ist umgekehrt f eine Isometrie bezüglich $\langle\, ,\, \rangle$, so gilt für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned}e_i^t A^t A e_j &= \kappa_B(b_i)^t A^t A\kappa_B(b_j)\\ &= (A\kappa_B(b_i))^t(A\kappa_B(b_j))\\ &= \kappa_B(f(b_i))^t\,\kappa_B(f(b_j))\\ &= \langle f(b_i), f(b_j)\rangle = \langle b_i, b_j\rangle = \delta_{ij},\end{aligned}$$

also gilt $A^t A = E_n$.

$\square$

Proposition 4.3 *Jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ hat einen reellen Eigenwert.*

Beweis : Wir fassen A als Matrix mit komplexen Einträgen, also als Element von $\mathbb{C}^{n\times n}$ auf. Für eine beliebige Matrix $M = (m_{ij}) \in \mathbb{C}^{r\times s} \quad (r, s \geqq 1)$ schreiben wir $\overline{M}$ für die Matrix mit den konjugiert-komplexen Einträgen $\overline{m_{ij}}$.

Da A reell und symmetrisch ist, gilt

$$\overline{A}^t = A.$$

Da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, existiert ein Eigenwert $\alpha \in \mathbb{C}$ von A. Sei $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \mathbb{C}^n$ der zugehörige Eigenvektor, d.h. es gilt $Av = \alpha v$. Dann ist $v \neq 0$, also folgt $\overline{v}^t v = \sum_{i=1}^{n} \mid v_i \mid^2 > 0$.

Aus

$$\begin{aligned} \alpha^t \overline{v} v &= \overline{v}^t(\alpha v) = \overline{v}^t(Av) \\ &= \overline{v}^t \overline{A}^t v = \overline{(Av)}^t v = \overline{\alpha v}^t v \end{aligned}$$

folgt also $\alpha = \overline{\alpha}$, d.h. $\alpha \in \mathbb{R}$. $\square$

Satz 4.4 *(**Spektralsatz für euklidische Vektorräume**, auch Hauptachsentransformation genannt)*

i) Sei $(V, \langle\, , \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $f : V \to V$ eine selbstadjungierte Abbildung, d.h. es gilt $\langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle$ für alle $v, w \in V$. Dann gibt es eine Orthonormalbasis von $(V, \langle\, , \rangle)$, die aus Eigenvektoren von f besteht. Insbesondere ist f diagonalisierbar.

- *Sei A eine symmetrische Matrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$. Dann gibt es eine orthogonale Matrix P, so dass*

  $$PAP^t$$

  eine Diagonalmatrix ist. Die Einträge dieser Diagonalmatrix sind die Eigenwerte von A.

Beweis :

i) Wir argumentieren mit Induktion nach $n = \dim V$. Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen. Wir nehmen also an, die Behauptung stimmt für Vektorräume der Dimension $< n$. Nach 4.3 hat f einen reellen Eigenwert α. Sei b_1 ein Eigenvektor von f zu α, den wir so normieren, dass $||b_1|| = 1$ gilt. Mit dem Gram-Schmidt-Verfahren ergänzen wir b_1 zu einer Orthonormalbasis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ von V.

Dann ist $M_f(B, B) = \begin{pmatrix} a & * & \ldots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ mit einem $A' \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$. Da f selbstadjungiert ist, ist nach Satz 4.2 die Matrix $M_f(B, B)$ symmetrisch. Also gilt

$$M_f(B, B) = \begin{pmatrix} a & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

mit einer symmetrischen Matrix $A' \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$. Daher ist die Einschränkung von f auf den Unterraum $W = \langle b_2, \ldots, b_n \rangle$ nach Satz 4.2 ebenfalls selbstadjungiert. Nach Induktionsvoraussetzung existiert also eine Orthonormalbasis $C = (c_2, \ldots, c_n)$ von $\langle , \rangle$ auf W, so dass $M_{f|_W, C, C}$ eine Diagonalmatrix ist. Die Basis $(b_1, c_2, \ldots, c_n)$ leistet das Verlangte.

ii) folgt durch Anwenden von i) auf die lineare Abbildung $\lambda_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die selbstadjungiert bezüglich des kanonischen Skalarproduktes ist. Da $P^t = P^{-1}$ ist, hat PAP^t dieselben Eigenwerte wie A.

□

Für euklidische Vektorräume gibt der Spektralsatz 4.4 eine erschöpfende Antwort auf die Frage, für welche Endomorphismen es eine Basis aus Eigenvektoren gibt: Es sind genau die selbstadjungierten. Gibt es nämlich für einen Endomorphismus f eine Orthonormalbasis B aus Eigenvektoren, so ist $M_f(B, B)$ eine Diagonalmatrix, also symmetrisch. Nach Satz 4.2 ist f daher selbstadjungiert.

Wir wollen jetzt eine geometrische Anwendung des Spektralsatzes diskutieren, die den Namen „Hauptachsentransformation“ erklärt.

Wir betrachten die Teilmenge

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 1 \right\}$$

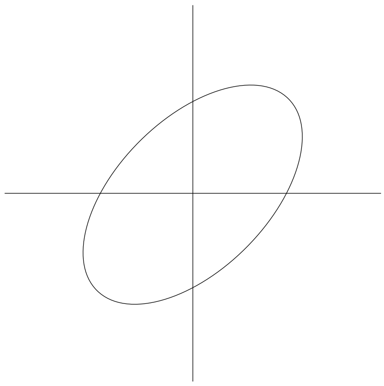
des $\mathbb{R}^2$. Mit Hilfe der symmetrischen Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

können wir E so schreiben:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : (x_1 x_2) S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1 \right\}.$$

Die Teilmenge E der Ebene $\mathbb{R}^2$ ist eine Ellipse



Nach dem Spektralsatz existiert eine orthogonale Matrix $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass

$$PSP^t = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix ist, wobei λ_1 und λ_2 die Eigenwerte von S sind. Aus

$$\begin{aligned} \chi_S(X) = (X-3)^2 - 1 &= X^2 - 6X + 8 \\ &= (X-4)(X-2) \end{aligned}$$

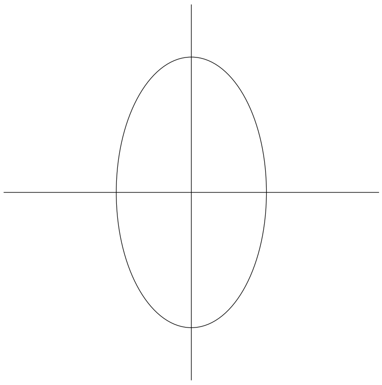
folgt, dass wir P so wählen können, dass

$$PSP^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

gilt. Also ist das Bild der Ellipse E unter der orthogonalen Matrix P

$$\begin{aligned} P(E) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \left(P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right)^t S \; P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1 \right\} \\ &\overset{P^{-1}=P^t}{=} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : (x_1 x_2) PSP^t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 4x_1^2 + 2x_2^2 = 1 \right\}, \end{aligned}$$

also eine koordinaten-achsensymmetrische Ellipse:



5 Unitäre Vektorräume

Für komplexe Vektorräume gibt es ebenfalls eine Theorie von Skalarprodukten. Wir können wir allerdings nicht mehr von positiv definiten Bilinearformen sprechen, da es in den komplexen Zahlen keinen Begriff der Positivität gibt. Man betrachtet stattdessen hermite'sche Formen.

Definition 5.1 *Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum. Eine* ***hermite'sche Form*** *auf V ist eine Abbildung*

$$f : V \times V \to \mathbb{C}$$

mit folgenden Eigenschaften:

i) f ist linear in der zweiten Variablen:

$$\begin{aligned} f(v, w_1 + w_2) &= f(v, w_1) + f(v, w_2) \text{ und} \\ f(v, \alpha w_1) &= \alpha f(v, w_1) \end{aligned}$$

für alle $v, w_1, w_2 \in V$ und $\alpha \in \mathbb{C}$.

ii) f ist konjugiert-linear in der ersten Variablen:

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2, w) &= f(v_1, w) + f(v_2, w) \text{ und} \\ f(\alpha v_1, w) &= \overline{\alpha} f(v_1, w) \end{aligned}$$

für alle $v_1, v_2, w \in V$ und $\alpha \in \mathbb{C}$.

iii) f ist konjugiert symmetrisch, d.h.

$$f(v, w) = \overline{f(w, v)} \text{ für alle } v, w \in V.$$

Eine hermite'sche Form ist also keine Bilinearform, denn sie ist nicht linear in der ersten Variablen. Dafür hat sie aber folgende wichtige Eigenschaft:

Ist f eine hermite'sche Form auf V, so gilt für alle $v \in V$ nach iii) aus Definition 5.1:

$$f(v, v) = \overline{f(v, v)}, \text{ d.h. } f(v, v) \in \mathbb{R}.$$

Daher ist die folgende Definition sinnvoll:

Definition 5.2 *Eine hermite'sche Form f auf dem komplexen Vektorraum V heißt* ***positiv definit****, falls für alle $v \neq 0$ aus V*

$$f(v,v) > 0$$

gilt.

Beispiel: *Die Form $\langle x, y \rangle = \overline{x}^t y$ ist positiv definit auf $\mathbb{C}^n$.*

Für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ schreiben wir $A^* = \overline{A}^t$ und nennen A^* die Adjungierte zu A. Eine Matrix A heißt **hermite'sch**, falls $A = A^*$ gilt. Die reellen hermite'schen Matrizen sind genau die symmetrischen. Wir nennen eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ **unitär**, falls $A^* A = E_n$ git. Die reellen unitären Matrizen sind also genau die orthogonalen.

Definition 5.3 *Ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum V zusammen mit einer positiv definiten hermite'schen Form heißt* ***unitärer Vektorraum****.*

In einem unitären Vektorraum $(V, \langle , \rangle)$ ist durch $||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ eine Länge von Vektoren definiert. Diese erfüllt die Eigenschaften i)-iii) aus Lemma 2.11, wobei man in iii) den komplexen Absolutbetrag verwenden muss. (Prüfen Sie das!)

Man kann das Gram-Schmidt-Verfahren aus Satz 2.4 auf unitäre Vektorräume übertragen und so die Existenz einer Orthonormalbasis für eine positiv definite hermite'sche Form zeigen.

Satz 5.4 *Es sei $f : V \to V$ linear und es sei B eine Orthonormalbasis von $(V, \langle , \rangle)$. Wir betrachten die Koordinatenmatrix $A = M_f(B, B)$ der linearen Abbildung f.*

i) A ist genau dann hermite'sch, wenn $\langle v, f(w) \rangle = \langle f(v), w \rangle$ für alle $v, w \in V$ gilt. Die lineare Abbildung f heißt dann ***selbstadjungiert*** *bezüglich $\langle , \rangle$.*

ii) A ist genau dann unitär, wenn $\langle v, w \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle$ für alle $v, w \in V$ gilt.

Diesen Satz beweist man analog wie Satz 4.2.

Ebenfalls analog zum reellen Spektralsatz Satz 4.4 kann man den folgenden Spektralsatz für unitäre Vektorräume beweisen.

Satz 5.5 (Spektralsatz für unitäre Vektorräume)

i) Sei $(V, \langle \, , \, \rangle)$ ein unitärer Vektorraum und $f \colon V \to V$ eine selbstadjungierte lineare Abbildung, d.h. es gilt $\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle$ für alle $v, w \in V$. Dann gibt es eine Orthonormalbasis von $(V \langle , \rangle)$, die nur aus Eigenvektoren von f besteht. Insbesondere ist f diagonalisierbar.

ii) Sei A eine hermite'sche Matrix in $\mathbb{C}^{n \times n}$. Dann gibt es eine unitäre Matrix $P \in U(n, \mathbb{C})$, so dass

$$PAP^* \text{ eine Diagonalmatrix}$$

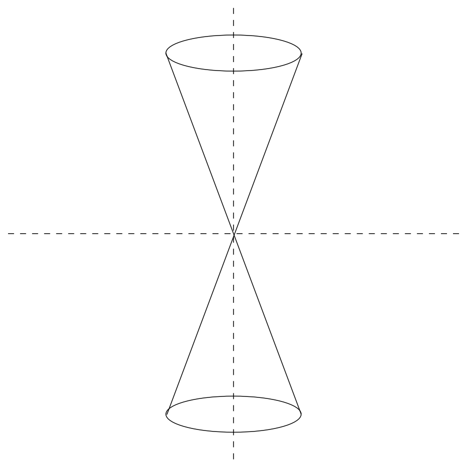
mit reellen Einträgen ist.

6 Kegelschnitte

Kegelschnitte erhält man, wenn man die Oberfläche eines Doppelkegels im $\mathbb{R}^3$ mit einer affinen Ebene schneidet. Ein rotationssymmetrischer Doppelkegel mit Spitze im Ursprung und der dritten Koordinatenachse als Kegelachse ist gegeben als

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - hx_3^2 = 0 \right\}$$

für ein $h > 0$.



Schneiden wir den Kegel Γ mit einer affinen Ebene $M = w + W$ in $\mathbb{R}^3$, wobei $r \in \mathbb{R}^3$ und $W \subset \mathbb{R}^3$ ein zweidimensionaler Unterraum ist, so erhalten wir einen Kegelschnitt.

Wenn wir eine Basis s, t von W wählen, so lässt sich jeder Vektor in M schreiben als $r + \alpha s + \beta t$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Ein solcher Vektor liegt in Γ genau dann, wenn

$$(r_1 + \alpha s_1 + \beta t_1)^2 + (r_2 + \alpha s_2 + \beta t_2)^2 - h(r_3 + \alpha s_3 + \beta t_3^2) = 0$$

gilt. Hier sind

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \text{ und } t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

die Koordinaten im $\mathbb{R}^3$.

Die obige Gleichung lässt sich nach Ausmultiplizieren umformen zu einer Gleichung der Form

$$a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2 + d\alpha + e\beta + f = 0$$

für reelle Zahlen a, b, c, d, e, f, die von den Parametern $r_1, r_2, r_3, s_1, s_2, s_3, t_1, t_2, t_3$ der affinen Ebene M und von h abhängen.

Mit Hilfe der Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ und des Vektors $v = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$ können wir also den Schnitt von M mit dem Kegel Γ beschreiben als

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : (\alpha\beta) A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + (de) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + f = 0 \right\}.$$

Das führt zu folgender Definition:

Definition 6.1 *Ein **Kegelschnitt** $K_{A,v,f}$ ist die Menge aller Lösungen $x \in \mathbb{R}^2$ einer Gleichung der Form*

$$x^t A x + v^t x + f = 0$$

für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, ein $v \in \mathbb{R}^2$ und einen Skalar $f \in K$.

Ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$ und $f \in K$, so ist also

$$K_{A,v,f} = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f = 0\}$$

ein Kegelschnitt.

Wir wollen nun die Teilmengen $K_{A,v,f}$ des $\mathbb{R}^2$ geometrisch beschreiben.

Definition 6.2 *Eine Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heißt euklidische Bewegung der Ebene, falls für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$ gilt*

$$||\phi(v) - \phi(w)|| = ||v - w||.$$

Eine euklidische Bewegung erhält also die Abstände zwischen zwei Vektoren.

Beispiele

i) Für jedes $a \in \mathbb{R}^2$ ist die Translationsabbildung

$$t_a : x \mapsto x + a$$

eine euklidische Bewegung.

ii) Jede lineare Isometrie ist eine euklidische Bewegung

Eine euklidische Bewegung, die Null auf Null abbildet, erfüllt $||\phi(v)|| = ||v||$ für alle $v \in \mathbb{R}$. Sie ist also eine Isometrie. Daher ist jede euklidische Bewegung die Verknüpfung einer Isometrie mit einer Translationsabbildung.

Definition 6.3 *Zwei Kegelschnitte $K_{A,v,f}$ und $K_{A',v',f'}$ heißen **kongruent**, falls es eine euklidische Bewegung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(K_{A,v,f}) = K_{A',v',f'}$ gibt. Ein Kegelschnitt $K_{A,v,f}$ heißt **entartet**, falls $K_{A,v,f}$ ein Paar von Geraden, eine einzelne Gerade, ein Punkt oder die leere Menge ist.*

Satz 6.4 *Jeder nicht entartete Kegelschnitt $K_{A,v,f}$ ist kongruent zu einer der folgenden Typen:*

1. *Ellipse:* $ax_1^2 + cx_2^2 - 1 = 0$
2. *Hyperbel:* $ax_1^2 - cx_2^2 - 1 = 0$
3. *Parabel:* $ax_1^2 - x_2 = 0$.

Hier sind jeweils $a > 0$ und $c > 0$.

Beweis : Da A symmetrisch ist, gibt es nach dem Spektralsatz eine orthogonale Matrix P, so dass $P^{-1}AP = P^tAP$ eine Diagonalmatrix ist. P ist eine Isometrie mit $P(K_{A,v,f}) = K_{PAP^{-1},Pv,f}$. Ist nämlich $x \in K_{A,v,f}$, so gilt

$$0 = (Px)^t PAP^{-1}(Px) + v^t(P^tPx) + f,$$

also ist $Px \in K_{PAP^{-1},Pv,f}$.

Ist umgekehrt $y \in K_{PAP^{-1},Pv,f}$, so ist $P^{-1}y \in K_{A,v,f}$ mit einer analogen Rechnung.

Indem wir zu einem kongruenten Kegelschnitt übergehen, können wir also annehmen, dass $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ eine Diagonalmatrix ist. Dann ist

$$K_{A,v,f} = \{x : ax_1^2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f = 0\}.$$

1. Fall: $a \neq 0$ und $c \neq 0$. Es sei $u \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor.

Dann ist $t_u(K_{A,v,f}) = K_{A,(v-A^tu-Au),f_u}$ mit $f_u = u^tA^tu - v^tu + f$, wie aus der Identität

$$x^tAx + v^tx + f = (x+u)^tA(x+u) + (-u^tA - u^tA^t + v^t)(x+u) + f_u$$

folgt. Setzen wir hier $u = \left(\frac{d}{2a}, \frac{e}{2c}\right)^t$, so ist $v - A^tu - Au = 0$, so dass $K_{A,v,f}$ kongruent zu $K_{A,0,f'}$ für $f' = f_u \in \mathbb{R}$ ist.

Es ist $K_{A,0,f'} = \{\binom{x_1}{x_2} : ax_1^2 + cx_2^2 + f' = 0\}$. Ist $f' = 0$, so ist $K_{A,0,0}$ entweder der Nullpunkt oder besteht aus zwei Geraden. In jedem Fall ist $K_{A,0,0}$ also entartet. Ist $f' \neq 0$, so ist

$$K_{A,0,f'} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : -\frac{a}{f'}x_1^2 - \frac{c}{f'}x_2^2 - 1 = 0 \right\}.$$

Ist $K_{A,0,f'} \neq \emptyset$, so ist mindestens einer der Koeffizienten $-\frac{a}{f'}$ und $-\frac{c}{f'}$ positiv, und $K_{A,0,f'}$ ist eine Ellipse oder eine Hyperbel, nachdem wir eventuell noch mit $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ die Koordinaten vertauschen.

2. Fall: $c = 0, a \neq 0$. Dann ist $K_{A,b,f} = \{x : ax_1^2 + dx_1 + ex_2 + f = 0\}$.

Wie im ersten Fall kann man mit der Translation t_u für $u = (\frac{d}{2a}, 0)$ den Kegelschnitt $K_{A,v,f}$ überführen in den kongruenten Kegelschnitt $K_{A,v',f'}$ für ein $f' \in \mathbb{R}$ und den Vektor $v' = \binom{0}{e}$. Ist $e \neq 0$, so wenden wir die Translation t_u mit $u = \begin{pmatrix} 0 \\ f'/e \end{pmatrix}$ an. Das überführt $K_{A,v',f'}$ in den kongruenten Kegelschnitt

$$K_{A,v',0} = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : ax_1^2 + ex_2 = 0\} = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : -\frac{a}{e}x_1^2 - x_2 = 0\}$$

Ist $-\frac{a}{e} > 0$, so ist dies eine Parabel. Ist $-\frac{a}{e} < 0$, so wenden wir die Spiegelung $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ auf $K_{A,v',0}$ an und erhalten so die zu $K_{A,v',0}$ kongruente Parabel

$$\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : -\frac{a}{e}x_1^2 + x_2 = 0\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : \frac{a}{e}x_1^2 - x_2 = 0\right\}.$$

Ist $e = 0$ so ist $K_{A,v',f'} = \left\{\binom{x_1}{x_2} : ax_1^2 + f = 0\right\}$. Dieser Kegelschnitt ist entartet. Ist $-\frac{f}{a} < 0$, so ist er leer, ist $-\frac{f}{a} = 0$, so handelt es sich um eine Gerade, und ist $-\frac{f}{a} > 0$, um ein Geradenpaar.

9. Fall: $c \neq 0, a = 0$.

Das kann man durch Vertauschen der Variablen x_1 und x_2 genau wie den zweiten Fall behandeln.

4. Fall: $a = 0, c = 0$.

Dann ist $K_{A,v,f} = \left\{\binom{x_1}{x_2} : dx_1 + ex_2 + f = 0\right\}$. Hier rechnet man leicht nach, dass $K_{A,v,f}$ entartet ist. $\square$