Main Math Challenge 2022

Goethe-Universität Frankfurt am Main

Institut für Mathematik

Speed Challenge

Teamname:

Aufgabe 1.

Derek übt den Korbwurf für ein Basketballspiel. Innerhalb der ersten fünf Minuten schafft er es 6 Punkte zu erzielen. Wieviele Wege gibt es diese Punktzahl zu erreichen, wenn jeder Wurf entweder 1, 2 oder 3 Punkte gibt?

Lösung:

- 1 Möglichkeit mit 6 Würfen: $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$
- 5 Möglichkeiten mit 5 Würfen: $(1, 1, 1, 1, 2)$, $(1, 1, 1, 2, 1)$, $\ldots$, $(2, 1, 1, 1, 1)$
- 4+6 Möglichkeiten mit 4 Würfen: $(1, 1, 1, 3)$, $(1, 1, 3, 1)$, $(1, 3, 1, 1)$, $(3, 1, 1, 1)$
  $(1, 1, 2, 2)$, $(1, 2, 1, 2)$, $(1, 2, 2, 1)$, $(2, 1, 1, 2)$, $(2, 1, 2, 1)$, $(2, 2, 1, 1)$
- 1+6 Möglichkeiten mit 3 Würfen: $(2, 2, 2)$, $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$
- 1 Möglichkeit mit 2 Würfen: $(3, 3)$.

Insgesamt sind es also $1 + 5 + 10 + 7 + 1 = 24$ Wege.

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

Speed Challenge

Teamname:

Aufgabe 2.

Berechne $a^3 + b^3$, wenn $a + b = 5$ und $a \cdot b = 1$ gilt.

Lösung:
Durch Ausmultiplizieren erhalten wir

$$(a + b)^3 = a^3 + 3(a + b)ab + b^3$$

und daher

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3(a + b)ab = 5^3 - 3 \cdot 5 \cdot 1 = 125 - 15 = 110.$$

Main Math Challenge 2022
Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Mathematik

Speed Challenge

Teamname:

Aufgabe 3.

Es sei $f(x) = \frac{2x}{3x+4}$. Wie muss $g(x)$ gewählt werden, damit $f(g(x)) = x$ gilt?

Lösung:
Wählen wir $g(x) = \frac{4x}{2-3x}$, so gilt nach Erweitern mit $2-3x$ in $(*)$

$$f(g(x)) = \frac{\frac{8x}{2-3x}}{\frac{12x}{2-3x}+4} \overset{(*)}{=} \frac{8x}{12x+4(2-3x)} = \frac{8x}{8} = x$$

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

Main Math Challenge 2022

Goethe-Universität Frankfurt am Main

Institut für Mathematik

Speed Challenge

Teamname:

Aufgabe 4.

Peter wohnt mit seinem Hund Charlie in einer Hütte abseits eines $10km$ entfernten Dorfes. Er möchte einkaufen gehen und nimmt dabei seinen Hund mit. Peter läuft mit einer konstanten Geschwindigkeit von $1km/h$ zum Dorf. Da Peter jede Woche mit Charlie einkaufen geht, kennt dieser bereits den Weg und rennt daher mit einer Geschwindigkeit von $4km/h$ zum Dorf vorraus. Dort angekommen rennt er wieder zu Peter zurück und pendelt immer weiter hin und her, bis Peter schließlich am Dorf angekommen ist. Welche Strecke hat Charlie am Ende zurückgelegt?

Lösung:
Sei $v = 1km/h$. Peter kommt nach $T = \frac{10km}{v}$ am Dorf an. Da Charlie immer mit einer Geschwindigkeit von $4v$ läuft, hat er in dieser Zeit eine Strecke von $S = 4vT = 40km$ zurückgelegt.

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

Main Math Challenge 2022

Goethe-Universität Frankfurt am Main

Institut für Mathematik

Speed Challenge

Teamname:

Aufgabe 5.

Anna, Bert und Clarissa bestimmen jeweils ohne sich untereinander abzusprechen zufällig eine ganze Zahl zwischen -5 und 5 (5 und -5 dürfen auch gewählt werden). Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Summe dieser drei Zahlen 0?

Lösung:
Da jeder der drei ohne Absprache eine von 11 Zahlen auswählt, gibt es

$$11^3 = 1331$$

verschiedene Zusammensetzungen, wobei diese jeweils gleichwahrscheinlich sind. Bezeichne mit a, b, c die von Anna, Bert bzw. Clarissa gewählte Zahl. Damit sich diese zu 0 summieren muss $c = -a - b$ gelten und daher muss

$$-5 \leq a + b = -c \leq 5. \tag{1}$$

Ist nun $a = -5$ so gibt es 6 mögliche Werte von b, die sowohl (1) als auch $-5 \leq b \leq 5$ erfüllen, nämlich $b = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Geht man nun nacheinander alle Werte von $a = -5, \ldots, 5$ durch erhält man insgesamt

$$6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 = 91$$

mögliche Wahlen von a, b, c die sich zu 0 summieren. Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{91}{1331}.$$

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

Main Math Challenge 2022

Goethe-Universität Frankfurt am Main

Institut für Mathematik

Speed Challenge

Teamname:

Aufgabe 6.

Für welche Paare (a, b) reeller Zahlen gilt

$$a + b = a \cdot b = a^2 - b^2 \ ?$$

Lösung:
Gilt $ab = 0$, so muss $a = 0$ oder $b = 0$ damit muss dann wegen $a + b = ab = 0$ bereits $a = b = 0$ gelten. Nehmen wir nun an, dass $ab \neq 0$ und daher auch $a + b = ab \neq 0$ so folgt aus der dritten binomischen Formel $a + b = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, nach Division durch $a + b \neq 0$, dass $a - b = 1$ gelten muss, bzw. $a = b + 1$.
Durch Einsetzen in die erste Gleichung ergibt sich: $2b + 1 = b^2 + b$, also $b^2 - b - 1 = 0$.
Die p-q-Formel liefert die beiden Lösungen $b_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Die Gleichungskette gilt also für die drei Paare

$$(a_1, b_1) = \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right), (a_2, b_2) = \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

und

$$(a_3, b_3) = (0, 0).$$

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

Main Math Challenge 2022

Goethe-Universität Frankfurt am Main

Institut für Mathematik

Speed Challenge

Teamname:

Aufgabe 7.

Bestimmen Sie alle positiven reellen Zahlen, sodass $x^y = y^x$ gilt.

Lösung:
Offfensichtlich gilt für alle $x > 0$, dass $x^x = x^x$ also sind alle Paare (x, x) Lösungen. Sei nun $y \neq x$ positiv mit $x^y = y^x$. Da $x > 0$ ist $t = \frac{y}{x}$ wohldefiniert und ungleich 1, da $x \neq y$. Es ergibt sich die Gleichung

$$x^{tx} = (tx)^x.$$

Zieht man nun die x-te Wurzel und dividiert durch $x > 0$ so erhält man

$$t = x^{t-1}$$

und daher, weil $t \neq 1$,

$$x = t^{\frac{1}{t-1}}, \ y = tx = t^{\frac{t}{t-1}}.$$

Damit ist für jedes $t > 0, t \neq 1$ durch $(t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}})$ ein Lösungspaar gegeben und nach obiger Rechnung ist auch jedes Lösungspaar (x, y) mit $x \neq y$ von dieser Form.

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

Main Math Challenge 2022

Goethe-Universität Frankfurt am Main

Institut für Mathematik

Speed Challenge

Teamname:

Aufgabe 8.

Es seien x und y positive reelle Zahlen mit $x+y=1$. Zeigen Sie

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) \geq 9.$$

Lösung:
Nach Voraussetzung ist $y = 1-x \in (0,1)$. Damit folgt

$$(1+\tfrac{1}{x})(1+\tfrac{1}{y}) = \frac{x+1}{x} \cdot \frac{y+1}{y} = \frac{x+1}{x} \cdot \frac{2-x}{1-x} = \frac{2+x-x^2}{x(1-x)} = 1 + \frac{2}{x(1-x)}.$$

Da $f(x) = x(1-x)$ eine Parabel mit Maximum von $\frac{1}{4}$ bei $x = \frac{1}{2}$ beschreibt, ist

$$1 + \frac{2}{x(1-x)} \geq 1 + \frac{2}{\frac{1}{4}} = 1 + 8 = 9.$$

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

Main Math Challenge 2022

Goethe-Universität Frankfurt am Main

Institut für Mathematik

Speed Challenge

Teamname:

Aufgabe 9.

Finden Sie alle natürlichen Zahlen n, so dass n^4+4 eine Primzahl ist.
Hinweis: Können Sie einen Bezug zuwischen n^4+4 und $(n^2+2n+2)(n^2-2n+2)$ herstellen?

Lösung:
Für $n=1$ ist $1^4+4=5$ eine Primzahl. Um zu überprüfen, ob es weitere Möglichkeiten gibt, beachte, dass gilt

$$\begin{aligned} n^4+4 &= n^4+4n^2+4-4n^2 = (n^2+2)^2-(2n)^2 \\ &= \big((n^2+2)+2n\big)\big((n^2+2)-2n\big) \\ &= (n^2+2n+2)(n^2-2n+2). \end{aligned}$$

Damit n^4+4 eine Primzahl ist, muss mindest einer der Faktoren 1 sein. Dabei ist $n^2+2n+2>2$ und kann somit nicht 1 sein, und es gilt

$$1 = n^2-2n+2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = n^2-2n+1 = (n-1)^2.$$

Die letzte Gleichung kann aber nur gelöst werden für $n=1$ und somit ist das auch die einzige Möglichkeit.

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

Main Math Challenge 2022

Goethe-Universität Frankfurt am Main

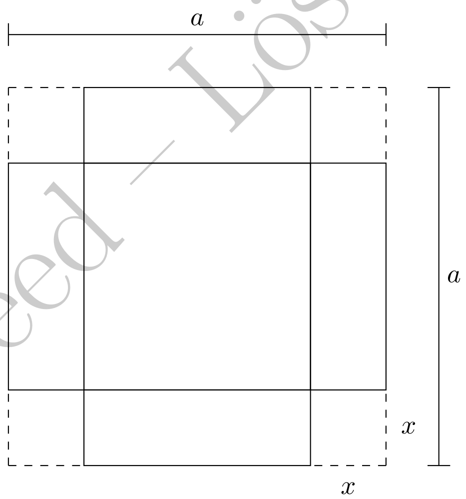
Institut für Mathematik

Speed Challenge

Teamname:

Aufgabe 10.

Aus einem quadratischen Stück Pappe mit Seitenlänge a wird eine Kiste gebaut, in dem jeweils in den vier Ecken eine x-mal-x große Fläche entfernt wird und anschließend die Seiten hochgeklappt werden.



Zeigen Sie, dass das Volumen der Box dann und nur dann maximiert wird, wenn die Grundfläche der Box gleich der Summe der vier Seitenflächen ist.

Lösung:
Für das Volumen der Box gilt $V(x) = (a-2x)^2 \cdot x$, für die Grundfläche $F(x) = (a-2x)^2$ und für jede Seitenfläche gilt $S(x) = x \cdot (a-2x)$. Es gilt

$$V'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2 = F(x) - 4S(x)$$

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

wodurch sich mit der *abc*-Formel die Nullstellen

$$x_{1,2} = \frac{8a \pm \sqrt{64a^2 - 48a^2}}{24} = \frac{8a \pm 4a}{24} = a\frac{2 \pm 1}{6}.$$

Also gilt genau für $x_{1,2}$, dass $F(x_{1,2}) = 4S(x_{1,2})$. Aus Anschauungsgründen muss $0 < x < \frac{a}{2}$ sein (man kann nicht mehr Papier wegschneiden als vorhanden ist) und daher ist die Grundfläche nur für x_1 gleich der Summe der vier Seitenflächen. Es gilt

$$V''(x_1) = 24x_1 - 8a = 24\frac{a}{6} - 8a = -4a < 0.$$

Damit ist bei $x_1 = \frac{a}{6}$ das Volumen maximal.

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

Main Math Challenge 2022

Goethe-Universität Frankfurt am Main

Institut für Mathematik

SPEED CHALLENGE

TEAMNAME:

Aufgabe 11.

Wenn das Produkt aller Zahlen von 1 bis 100 durch 2^n teilbar ist, wie groß darf die natürliche Zahl n maximal sein?

Lösung:
Zu zählen ist, wie oft der Primfaktor 2 insgesamt in den Zahlen 1 bis 100 vorkommt.
Mindestens einmal findet er sich in allen geraden Zahlen $2, 4, \ldots, 100$.
Mindestens ein zweites Mal in den Zahlen $4, 8, \ldots, 100$.
Ein drittes Mal in $8, 16, \ldots, 96$, ein viertes Mal in $16, 32, \ldots, 96$, ein fünftes Mal in $32, 64, 96$ und ein sechstes Mal nur in 64.

Damit ergibt sich: $n = 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$.

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

Main Math Challenge 2022

Goethe-Universität Frankfurt am Main

Institut für Mathematik

Speed Challenge

Teamname:

Aufgabe 12.

Wieviele Möglichkeiten gibt es, ein 4×4 Schachbrett mit den Farben rot und blau so anzumalen, dass jede Zeile und jede Spalte genau 2 rote und 2 blaue Kästchen erhält?

Lösung:
Wir färben zunächst die erste Zeile beliebig mit 2 roten und 2 blauen Kästchen. Dafür gibt es $\binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten.
Die beiden Spalten unter den blauen Kästchen der ersten Zeile können wir jeweils beliebig füllen mit einem weiteren blauen und zwei roten Kästchen. Jedoch müssen wir hier eine Fallunterscheidung machen, ob diese beiden Kästchen in der gleichen oder in einer unterschiedlichen Zeile landen:

Fall 1: Landen die beiden Kästchen in der gleichen Zeile –hierfür gibt es 3 Möglichkeiten–, so folgt, dass es noch zwei Reihen und zwei Zeilen gibt, in denen noch gar kein blaues Kästchen existiert. Um die letzten 4 blauen Kästchen hinzuzufügen, gibt es nun aber nur noch eine Möglichkeit. In diesem Fall gibt es also $6 \cdot 3 = 18$ Möglichkeiten.

Fall 2: Landen die beiden Kästchen in unterschiedlichen Zeilen –hierfür gibt es $3 \cdot 2$ Möglichkeiten–, so verbleiben zwei Kästchen in jeweils zwei Zeilen, die jeweils gegensätzlich mit blau und rot gefärbt werden müssen. Dafür gibt es 2 weitere Möglichkeiten. Also insgesamt $6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 72$ Möglichkeiten.

Insgesamt erhalten wir $18 + 72 = 90$ Möglichkeiten.

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

Speed Challenge

Teamname:

Aufgabe 13.

Wenn $a^x = b^y = c^z$ sowie $b^2 = ac$ gilt mit positiven reellen Zahlen a, b, c, x, y, z, wie lässt sich dann y schreiben?

a) $y = \frac{2xz}{x+z}$, b) $y = \frac{xz}{x+z}$, c) $y = \sqrt{2xz}$, d) $y = \sqrt{xz}$.

Lösung:
Es gilt

$$(b^y)^{x+z} = (b^y)^z(b^y)^x = (a^x)^z(c^z)^x = (ac)^{xz} = (b^2)^{xz} = b^{2xz}.$$

Folglich ist

$$b = (b^y)^{\frac{x+z}{2xz}} = b^{y\frac{x+z}{2xz}}.$$

Damit diese Gleichung gilt, muss $y\frac{x+z}{2xz} = 1$ sein, also $y = y\frac{2xz}{x+z}$ und damit ist a) die richtige Antwort.

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

Main Math Challenge 2022

Goethe-Universität Frankfurt am Main

Institut für Mathematik

Speed Challenge

Teamname:

Aufgabe 14.

Auf einen Kredit in Höhe von 2000,– EUR wird eine *monatliche* Zinsrate von 1% verlangt. Wenn der Kredit in 36 Monaten mit einer festen monatlichen Rate zurückgezahlt sein soll, wie hoch muss die monatliche Rate mindestens sein?
Hinweis: Es genügt eine geeignete Formel für die monatliche Rate zu bestimmen.

Lösung:
Um die Notation zu vereinfachen, sei u_n die Restschuld nach dem n-ten Monat mit $u_0 = 2000$. Sei p die monatliche Rate und $r = \frac{1}{100} + 1 = \frac{101}{100}$ sei die monatliche Zinsrate. Dann gilt

$$\begin{aligned}
u_1 &= ru_0 - p \\
u_2 &= ru_1 - p = r^2u_0 - rp - p = r^2u_0 - p(r+1) \\
u_3 &= ru_2 - p = r^3u_0 - rp(r+1) - p = r^3u_0 - p(r^2+r+1) \\
&\vdots \\
u_n &= r^n u_0 - p(r^{n-1} + \ldots + r + 1).
\end{aligned}$$

Nun soll $u_{36} = 0$ gelten und somit folgt

$$p = u_0 \frac{r^{36}}{r^{35} + \ldots + r + 1}$$

Um die Lösung explizit zu finden, sei nun $S_n = r^{n-1} + \ldots + r + 1$. Dann ist $rS_n = r^n + \ldots + r^2 + r$,

also gilt

$$S_n(r-1) = r^n - 1 \quad \text{und somit} \quad S_n = \frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

Also folgt (wegen $r-1=\frac{1}{100}$)

$$p = 2000\frac{r^{36}(r-1)}{r^{36}-1} = 20\frac{r^{36}}{r^{36}-1} \approx 66,4286.$$

Also müssten mindestens $66,43$EUR monatlich gezahlt werden.

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

Main Math Challenge 2022

Goethe-Universität Frankfurt am Main

Institut für Mathematik

Speed Challenge

Teamname:

Aufgabe 15.

Eine arithmetische Folge ist eine Folge von natürlichen Zahlen $a_1, a_2, \ldots$ mit der Eigenschaft, dass die Differenz zweier benachbarter Folgenglieder konstant ist, d.h., es existiert eine natürliche Zahl d, so dass

$$a_{i+1} = a_i + d \quad \text{für jede natürliche Zahl } i \text{ gilt.}$$

Zeigen Sie: Bilden $a_1, a_2, \ldots$ eine unendliche arithmetische Folge, die eine Quadratzahl enthält, so enthält sie automatisch auch mindestens eine weitere Quadratzahlen.

Lösung (unter Vorraussetzung, das die Zahlen $a_1, a_2, \ldots$ und d natürlich sind):
Ist a^2 ein Element der arithmetischen Folge, so ist auch $a^2 + (2a + d)d = (a + d)^2$ ein Element der Folge, wie gesucht.

In der Tat folgt analog dann auch $a^2 + (2adk + dk^2) = (a + kd)^2$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Also gibt es sogar unendlich viele Quadratzahlen.

Sind die geforderten Zahlen nicht notwendig natürliche Zahlen sind, dann stimmt die Aussage jedoch nicht, wie man anhand von leichten Gegenbeispielen sehen kann.

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

Main Math Challenge 2022

Goethe-Universität Frankfurt am Main

Institut für Mathematik

Speed Challenge

Teamname:

Aufgabe 16.

Wie viele sechsstellige Zahlen der Form $abccba$ mit b ungerade gibt es, die durch 7 teilbar sind?

Lösung:
Es gilt, dass $abccba = a \cdot 100.001 + b \cdot 10.010 + c \cdot 1.100$, wobei schriftliche Division ergibt

$$100.001 = 14.285 \cdot 7 + 6, \qquad 10.010 = 1.430 \cdot 7 + 0, \qquad 1.100 = 157 \cdot 7 + 1.$$

Die Divisionsreste zeigen: $abccba$ ist genau dann durch 7 teilbar, wenn $6a + c$ durch 7 teilbar ist. Es ergeben sich die Zahlen:

$1b11b1$	$1b88b1$	$2b22b2$	$2b99b2$	$3b33b3$	$4b44b4$	$5b55b5$
$6b66b6$	$7b00b7$	$7b77b7$	$8b11b8$	$8b88b8$	$9b22b9$	$9b99b9$

für beliebiges $b \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Also gibt es insgesamt $14 \cdot 5 = 70$ solcher Zahlen.

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

Main Math Challenge 2022

Goethe-Universität Frankfurt am Main

Institut für Mathematik

Speed Challenge

Teamname:

Aufgabe 17.

Es gelten die folgenden Rechnungen:

$$\begin{aligned} 99^1 &= \mathbf{99} \\ 99^2 &= 9801 \\ 99^3 &= 970\mathbf{299} \\ 99^4 &= 96059601 \\ 99^5 &= 95099004\mathbf{99} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass 99^n mit den Ziffern 99 endet, wenn n ungerade ist.

Lösung:
Es gilt nach dem binomischen Lehrsatz

$$99^n = (100-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 100^k (-1)^{n-k}.$$

Jeder der Summanden ist durch 100 teilbar, bis auf der $k = 0$-Term. Daher gibt es ein $K \in \mathbb{N}$, sodass

$$99^n = 100K + (-1)^n.$$

Die letzten beiden Ziffern von $100K$ sind immer 0 und daher sind die letzten beiden Ziffern von 99^n gerade 99 für ungerade n und 01 für gerade n.

Alternative Lösung (ohne Binomialkoeffizienten):
Wir verwenden die Schreibweise $a \equiv b \bmod k$, wenn a und b Zahlen sind, die beim Teilen durch k den gleichen Rest haben. Es gilt dann:

$$\text{Ist } a \equiv b \bmod k, \text{ so auch } a^n \equiv b^n \bmod k \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

Wegen $99 \equiv -1 \mod 100$, ist somit auch $99^n \equiv (-1)^n \mod 100$.
Für n ungerade ist $(-1)^n = -1$ und somit gilt $99^n \equiv -1 \mod 100$ für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$. Das bedeutet aber, dass 99^n in diesem Fall 1 kleiner ist als ein Vielfaches von 100 und somit mit den Ziffern 99 endet.

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.