FACHBEREICH INFORMATIK UND MATHEMATIK
UNIVERSITÄT FRANKFURT/MAIN

KLAUSUR

für das Staatsexamen L3 Mathematik
im Frühjahr 2012
am 22.03.2012 von 9-13 Uhr

A. Grundwissen

I. Elementarmathematik
- Aufgabe 1 (2 Punkte)
- Aufgabe 2 (2 Punkte)

II. Analysis
- Aufgabe 3 (3 Punkte)
- Aufgabe 4 (3 Punkte)

III. Lineare Algebra und Geometrie
- Aufgabe 5 (2 Punkte)
- Aufgabe 6 (2 Punkte)
- Aufgabe 7 (2 Punkte)

IV. Stochastik
- Aufgabe 8 (2 Punkte)
- Aufgabe 9 (3 Punkte)

B. Vertiefungsgebiete

I. Zahlentheorie
- Aufgabe 10 (2 Punkte)
- Aufgabe 11 (3 Punkte)

II. Analysis
- Aufgabe 12 (2 Punkte)
- Aufgabe 13 (2 Punkte)
- Aufgabe 14 (2 Punkte)

III. Diskrete Mathematik
- Aufgabe 15 (3 Punkte)
- Aufgabe 16 (3 Punkte)

IV. Geometrien und Gruppen
- Aufgabe 17 (2 Punkte)
- Aufgabe 18 (2 Punkte)

V. Stochastische Prozesse
- Aufgabe 19 (2 Punkte)
- Aufgabe 20 (2 Punkte)

C. Didaktik (nur für Kandidaten nach neuer Ordnung)

I. Zufallsgeräte
- Aufgabe 21 (2 Punkte)

II. Gerade
- Aufgabe 22 (3 Punkte)

III. Hintereinanderausführung von Funktionen
- Aufgabe 23 (2 Punkte)

IV. Unterschiedliche Modellbildungen
- Aufgabe 24 (2 Punkte)

Aufgaben für die Staatsexamensklausur L3
im Frühjahr 2012

A. Grundwissen

I. Elementarmathematik

Aufgabe 1 (Wolfart)

Ein *Sehnenviereck* ist ein Viereck, dessen vier Eckpunkte auf einem gemeinsamen Umkreis liegen. Man zeige: Ein Sehnenviereck ist ein Trapez, wenn seine beiden Diagonalen gleichlang sind.

(2 Punkte)

Lösungsskizze: Peripheriewinkelsatz $\Rightarrow$ je zwei Winkel des Vierecks stimmen überein, außerdem ergänzen sich gegenüberliegende Winkel zu π $\Rightarrow$ zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel.

Aufgabe 2 (Kersting)

Sei $k \geq 0$ eine ganze Zahl. Beweisen Sie für $n \geq 1$ die Formel

$$\sum_{j=1}^{n} j(j+1)\cdots(j+k) = \frac{1}{k+2} n(n+1)\cdots(n+k+1) \ .$$

(2 Punkte)

Lösungsskizze: Induktion nach n.

II. Analysis

Aufgabe 3 (Wolfart)

Zeigen Sie: Es gibt keine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, die jeden ihrer Werte genau zweimal annimmt. Der Einfachheit halber dürfen Sie $f(0) = f(1) = 0$ annehmen.

(3 Punkte)

Lösungsskizze: Angenommen, es gäbe eine solche Funktion f. Im offenen Intervall $(0\,;1)$ kann f dann nur positive oder nur negative Werte annehmen, andernfalls hätte man eine dritte Nullstelle nach dem Zwischenwertsatz. Sei also o.B.d.A. $f > 0$ in $(0\,;1)$. Dann hätte f in Punkten $a \neq b$ zwei gleichgroße Maxima (Stetigkeit in abgeschlossenen Intervallen!), links und rechts von a und b im Abstand $< \delta$ aber nur echt kleinere Werte. Nach dem Zwischenwertsatz gäbe es also einen Wert $f(a) - \varepsilon = f(b) - \varepsilon$, der sogar viermal angenommen wird, Widerspruch!

Aufgabe 4 (Kersting)

Die komplexe Zahl $z \neq 1$ sei eine 5-te Einheitswurzel, d.h. es gilt $z^5 = 1$. Leiten Sie für $u = z + z^{-1}$ die Gleichung

$$u^2 + u - 1 = 0$$

ab und gewinnen Sie damit eine Formel für den Realteil von z.

(3 Punkte)

Lösungsskizze: Beide Gleichungen sind äquivalent zu $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$. Wegen $u = 2\Re z$ folgt $\Re z = -1/4 \pm \sqrt{5}/4$.

III. Lineare Algebra und Geometrie

Aufgabe 5 (Wolfart)

Seien $A, B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ mit $AB = BA$, ferner sei λ ein Eigenwert von A mit Eigenraum $U \subset \mathbb{C}^n$. Beweisen Sie $Bx \in U$ für alle $x \in U$, und dass mindestens ein gemeinsamer Eigenvektor von A und B existiert.

(2 Punkte)

Lösungsskizze: $x \in U \Rightarrow A(Bx) = B(Ax) = \lambda Bx \Rightarrow Bx \in U \Rightarrow B$ ist Endomorphismus von U. Da U ein $\mathbb{C}$–Vektorraum ist, muss ein Eigenwert und mindestens ein Eigenvektor für B existieren, der tut's.

Aufgabe 6 (Johannson)

Jede 3×3-Matrix $A \in GL_n(\mathbb{R})$ induziert zwei Abbildungen

$$f_A, g_A : S^2 \to S^2$$

der 2-Sphäre $S^2 := \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \| x \| = 1 \}$ definiert durch

$$f_A(x) := +\frac{Ax}{\| Ax \|} \text{ und } g_A(x) := -\frac{Ax}{\| Ax \|}$$

(1) Zeigen Sie, dass für alle $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ mindestens eine der Abbildungen f_A oder g_A einen Fixpunkt hat.
(2) Geben Sie eine Matrix $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ so an, dass f_A keinen Fixpunkt hat.

(2 Punkte)

Lösungsskizze: Das char. Polynom von A hat ungeraden Grad und somit mindestens einen Eigenwert und somit mindestens eine Eigenvektor.

Aufgabe 7 (Johannson)

Seien K_1 und K_2 zwei disjunkte Kreise in der Euklidischen Ebene, die sich gegenseitig nicht enthalten. Geben Sie eine Konstruktionsvorschrift für eine Gerade an, die tangential zu K_1 und K_2 ist.

(2 Punkte)

Lösungsskizze: 1. Man konstruiere die Mittelpunkte P_1, P_2 der Kreise
2. Man ziehe die Gerade g durch beide Mittelpunkte.
3. Man konstruiere Senkrechten auf g die die Kreise K_i (auf der gleichen Seite) im Punkt Q_i schneiden.
4. Die Verbindungsgerade durch Q_1, Q_2 schneide g in Q.
5. Der Kreis um Q durch den Mittelpunkt P_1 schneide K_1 in R.
Dann ist die Gerade durch Q und R die gesuchte gemeinsame Tangente.

IV. Stochastik

Aufgabe 8 (Wakolbinger)

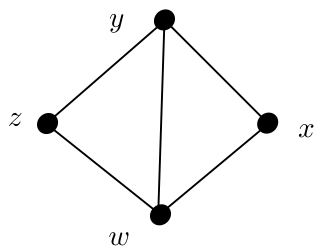
100 Punkte werden unabhängig und uniform in die Einheitskugel $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ verteilt. Ihre Abstände vom Zentrum $(0, 0, 0)$ sind $R_1, \ldots, R_{100}$.

a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion, die Dichte und den Erwartungswert μ von R_1. Wo ist die Dichte am größten, wo am kleinsten?
b) Finden Sie eine Zahl δ so, dass $\frac{1}{100}(R_1 + \ldots R_{100})$ annähernd mit Wahrscheinlichkeit 0.95 in das Intervall $[\mu - \delta, \mu + \delta]$ fällt.

(2 Punkte)

Lösungsskizze: a) $F(r) = r^3, f(r) = 3r^2$. $\mu = \int_0^1 rf(r)dr = 3/4$. $\mathbf{E}[R_1^2] = 3/5$, $\mathbf{Var}[R_1] = 3/5 - 9/16 =: \sigma^2$, $\sigma = 0.194$
b) Normalapproximation (Zentraler Grenzwertsatz): $\delta = 2\sigma/\sqrt{100} = 0.039$.

Aufgabe 9 (Wakolbinger)



Wir betrachten die gewöhnliche Irrfahrt auf dem skizzierten Graphen mit den Knoten $S = \{w, x, y, z\}$. Deren Übergangsmatrix Q soll zu einer Übergangsmatrix P modifiziert werden, welche die uniforme Verteilung auf S als reversible Gleichgewichtsverteilung hat.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss dazu ein gemäß Q von x nach y vorgeschlagener Schritt unterdrückt werden?
b) Geben Sie die 16 Einträge der Übergangsmatrix P an.

(3 Punkte)

Lösungsskizze: a) $Q_{xy} = 1/2$, $Q_{yx} = 1/3$. Die Reversibilittsbedingung $\frac{1}{4}P_{xy} = \frac{1}{4}P_{yx}$ wird erfüllt, wenn $P_{xy} = P_{yx} = 1/3$, d.h. ein durch Q vorgeschlagener Schritt von x nach y wird mit W'keit 2/3 unterdrückt.
b) $P_{zz} = P_{zy} = P_{zw} = 1/3$, $P_{wz} = P_{wy} = P_{wx} = 1/3$, $P_{xx} = P_{xw} = P_{xy} = 1/3$, $P_{yz} = P_{yw} = P_{yx} = 1/3$, die restlichen Einträge sind 0.

B. Vertiefungsgebiete

I. Zahlentheorie

Aufgabe 10 (Wolfart)

Mit $\nu_p(a)$ werde die Multiplizität des Primfaktors p in der Primfaktorzerlegung der natürlichen Zahl a bezeichnet, es ist also $a = \prod_p p^{\nu_p(a)}$, wobei das Produkt formal über alle Primzahlen läuft. Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen n

$$\nu_p(n!) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots$$

gilt. (Mit [ ] ist die Gaußklammer gemeint.)

(2 Punkte)

Lösungsskizze: $[n/p]$ ist die Anzahl der Faktoren von $n!$, die durch p teilbar sind, $[n/p^2]$ die Anzahl der durch p^2 teilbaren Faktoren etc.

Aufgabe 11 (Wolfart)

Sei $p > 3$ eine Primzahl, $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Man zeige:
a) Wenn $p \equiv 2 \bmod 3$, hat $x^3 \equiv a \bmod p$ genau eine Lösung $x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.
b) Wenn $p \equiv 1 \bmod 3$, ist $x^3 \equiv a \bmod p$ nur lösbar, wenn $a^{(p-1)/3} \equiv 1 \bmod p$. In diesem Fall hat die Kongruenz sogar drei Lösungen.

(3 Punkte)

Lösungsskizze: Sei g eine *Primitivwurzel* mod p, also erzeugendes Element der primen Restklassengruppe. Mit $a = g^b$ und $x = g^y$ schreibt sich die Kongruenz $x^3 \equiv a \bmod p$ als $3y \equiv b \bmod (p-1)$. Diese ist eindeutig lösbar im Fall a). Im Fall b) (also wenn $3 \mid p-1$) ist sie nur dann lösbar, wenn $3 \mid b$, also $p-1 \mid b \cdot \frac{p-1}{3} \Leftrightarrow a^{(p-1)/3} \equiv 1 \bmod p$, und mit der Lösung y sind auch $y + (p-1)/3$ und $y + 2(p-1)/3$ weitere Lösungen.

II. Analysis

Aufgabe 12 (Johannson)

Sei X ein kompakter Raum. Sei $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge von X und $x \in X - A$. Dann gibt es offene Mengen $U, V \subset X$ mit $A \subset U$, $x \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.

(2 Punkte)

Lösungsskizze: —

Aufgabe 13 (Kersting)

Von einer stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei bekannt, dass für den Gradienten ∇f gilt

$$\langle \nabla f(x), x \rangle > 0 \ , \quad \text{falls} \quad |x| = 1 \ .$$

Stellen Sie diese Bedingung graphisch dar. Folgern Sie, dass f ein lokales Minimum besitzt.

(2 Punkte)

Lösungsskizze: Auf dem Einheitskreis zeigt der Gradient immer nach außen. Also ist an der Stelle x mit $|x| = 1$ die Richtungsableitung von f in Richtung x positiv. Das Minimum von f auf $K = \{y \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq 1\}$ muss daher in Inneren von K liegen. Dann ist es ein lokales Minimum von f.

Aufgabe 14 (Kersting)

Sei $d_A(x, y)$ der Abstand des Punktes $P = (x, y)$ im $\mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten x, y vom Punkt A.

(i) Bestimmen Sie den Gradienten der Funktion d_0, wobei 0 der Ursprung im $\mathbb{R}^2$ bezeichne. Geben Sie seine Länge und Richtung an.

(ii) Sei nun $f = d_A + d_B + d_C$ für drei Punkte $A, B, C \in \mathbb{R}^2$, die nicht auf einer Linie liegen. Berechnen Sie den Gradienten von f und zeigen Sie, dass er genau dann im Punkt P verschwindet, wenn die drei Winkel zwischen den Strecken $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ und $\overline{PC}$ alle gleich 120° sind.

(2 Punkte)

Lösungsskizze: (i) Der Gradient hat (außerhalb von O) die Länge 1 und weist weg von O. (ii) Da ∇f die Summe von drei Vektoren der Länge 1 ist, die weg von A, B und C weisen, verschwindet der Gradient genau dann, wenn die angegebene Bedingung erfüllt ist, weil die aufaddierten Vektoren dann ein gleichseitiges Dreieck bilden müssen (Steiner Problem).

III. Diskrete Mathematik

Aufgabe 15 (Theobald)

(a) (i) Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| \geq 2$. Zeigen Sie, dass G zwei Knoten mit dem selben Grad besitzt.

(ii) Konstruieren Sie für $n \geq 2$ einen Graphen G_n, der $n-1$ verschiedene Grade besitzt. (Hinweis: G_n kann induktiv angegeben werden.)

(3 Punkte)

Lösungsskizze: a) Würden in G alle Knoten verschiedenen Grad haben, dann wäre $\{\deg(v) : v \in V\} = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Es kann jedoch nicht gleichzeitig ein Knoten vom Grad $n-1$ und ein Knoten vom Grad 0 existieren.
b) Vorüberlegung: Mit a) folgt $\{\deg(v) : v \in V\} = \{0, 1, \ldots, n-2\}$ oder $\{\deg(v) : v \in V\} = \{1, 2, \ldots, n-1\}$.
$n = 2$: der vollständige Graph K_2 auf zwei Knoten
$n \to n+1$: Nach I.V. existiert ein Graph $G_n = (E_n, V_n)$ auf n Knoten mit $n-1$ verschiedenen Knotengraden. Nach a) existieren zwei Knoten $v_1 \neq v_2$ mit $d := \deg(v_1) = \deg(v_2)$. Definiere $G_{n+1} = (V_{n+1}, E_{n+1})$ durch $V_{n+1} = V \cup \{w\}$ mit einem neuen Knoten w sowie

$$E_{n+1} = E_n \cup \{w, v_1\} \cup \{\{w, v\} : v \in V_n \text{ und } \deg(v) > d\}.$$

Der Graph G_{n+1} hat n verschiedene Grade. (Bemerkung: In G_{n+1} gilt $\deg(w) = n - d$, und der Grad $\deg(v) = n - d$ kommt doppelt vor.)

Aufgabe 16 (Theobald)

Sei $C \subset \mathbb{F}_2^6$ der durch durch die Generatormatrix

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Code. Bestimmen Sie die Anzahl der Codewörter, eine Kontrollmatrix sowie den Minimalabstand von C.

(3 Punkte)

Lösungsskizze: Der dreidimensionale Code enthält $2^3 = 8$ Codewörter. Aus der sich durch Zeilenvertauschung ergebenden kanonischen Form

$$G' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =: (I_3|A)$$

erhält man etwa die (nicht-eindeutige) Kontrollmatrix (zu G und G')

$$(-A^T|I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bezeichnet h die maximale Zahl, so dass je h Spalten der Kontrollmatrix linear abhängig sind, ergibt sich $h = 1$ und damit für den Minimalabstand $d = h + 1 = 2$.

IV. Geometrien und Gruppen

Aufgabe 17 (Behr)

(a) In der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$ sind Zykel gleicher Länge konjugiert. Beweis?

(b) Bestimmen Sie alle Normalteiler von $\mathfrak{S}_4$.

(2 Punkte)

Lösungsskizze: —

Aufgabe 18 (Behr)

Definieren Sie die Punktgruppe einer diskreten Bewegungsgruppe G (des euklidischen Raums E^n) und geben Sie ein Beispiel an, wo sie keine Untergruppe von G ist.

(2 Punkte)

Lösungsskizze: —

V. Stochastische Prozesse

Aufgabe 19 (Wakolbinger)

Wir betrachten eine Folge von Generationen in einer asexuellen Population. Die $(n+1)$-te Generation entsteht aus der n-ten dadurch, dass jedes Individuum in der n-ten Generation unabhängig von allem anderen eine Geom(1/3)-verteilte Anzahl von Kindern bekommt. Es sei X_n die Anzahl der Individuen in Generation n, und $X_0 := 1$.
Berechnen Sie
(i) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[\sin(\pi X_n/3^n)]$ (ii) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[\sin(\pi X_n/4^n)]$

(2 Punkte)

Lösungsskizze: $(X_n/3^n)$ ist ein nichtnegatives Martingal, also ergibt sich nach dem Martingalkonvergenzsatz und dem Satz von der dominierten Konvergenz in i) der Wert 1 und in ii) der Wert 0.

Aufgabe 20 (Wakolbinger)

Es geht um eine asymmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit Start in 0, bei der die Wahrscheinlichkeit für einen Schritt nach rechts gleich 1/3 und die für einen Schritt nach links gleich 2/3 ist. Es sei X_n die Position nach n Schritten.
(i) Finden Sie ein $c > 0$ so, dass $M_n := c^{X_n}$, $n = 0, 1, \dots$ ein Martingal ist.
(ii) Berechnen Sie unter Verwendung des Ergebnisses aus (i) die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass die Irrfahrt den Punkt 100 eher trifft als den Punkt -100.

(2 Punkte)

Lösungsskizze: (i) $c = 2$, (ii) Stoppsatz für Martingale: $1 = p \cdot 2^{100} + (1-p) \cdot 2^{-100}$, $p = (2^{100}-1)/(2^{200}-1) \approx 2^{-100}$.

C. Didaktik (nur für Kandidaten nach neuer Ordnung)

I. Zufallsgeräte

Aufgabe 21 (Oldenburg)

Vergleichen Sie verschiedene Zufallsgeräte. Welche Vor- und Nachteile haben sie für die Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs?

(2 Punkte)

Lösungsskizze: Laplaceversuche vs. teilsymmetrische oder ganz unsymmetrische Würfelkörper; Beziehung rel. Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit: Bei der mittleren Art können Symmetrieüberlegungen empirische Erkenntnisse verbessern.

II. Gerade

Aufgabe 22 (Oldenburg)

Eine Vorstellung zur Geraden ist die folgende: Eine Gerade ist eine Kurve, die die Richtung nicht ändert.
a) Vergleichen Sie die algebraische Beschreibung von Geraden in der Sekundarstufe I mit der vektoriellen Darstellung allgemein und in Hinblick auf diese Vorstellung.
b) Wie kann in der Sekundarstufe II die Richtung einer Kurve im Raum gefasst werden, und wie, dass diese Richtung konstant ist? Skizzieren Sie eine mögliche Unterrichtsstunde zu diesem Thema.
c) Fassen sie die algebraische Beschreibung des geometrischen Objektes der Geraden als eine innermathematische Modellbildung auf und prüfen Sie, ob sich der Modellbildungskreislauf darauf anwenden lässt.

(3 Punkte)

Lösungsskizze: a) Beziehung der Parameter aus y=mx+d und (x,y)=(a,b)+t*(u,v) sollte explizit sein.
b) Ableitung einer parametrisierten Kurve $->$ Tangentialvektor.
U-Stunde dazu, entweder: i) Kurve, Diffenzenvektoren berechnen, Grenzwert approximieren; oder ii) Punkt und Tangentialvektor vorgeben, nächsten Kurvenpunkt durch Summation/Integration. Oder sonstige plausible Idee.
c) Geometrische Gerade=Realmodell; $y = mx + b$=Math. Modell; Punktemenge $\{(x, y) \mid y = mx + b\}$=Math. Lösung; Die Anwendung ist möglich.

III. Hintereinanderausführung von Funktionen

Aufgabe 23 (Oldenburg)

a) Erläutern Sie zwei Vorstellungen zur Hintereinanderausführung von Funktionen. Welche Visualisierungsmöglichkeiten gibt es?
b) Mit welchen Vorstellungen von der Ableitung kann die Kettenregel gut verstanden werden? Helfen diese auch in der Integralrechnung?

(2 Punkte)

Lösungsskizze: a) Machinenvorstellung, Operatorpfeile, Graph: Reflektion des Funktionswertes der inneren Funktion an der Winkelhalbierenden
b) Differentialrechnung: Lokale Linearisierung; Differentenquotient als Vergrößerungsfaktor; Integralrechung: Substitution damit schwieriger wegen Summation, aber auch hilfreich

IV. Unterschiedliche Modellbildungen

Aufgabe 24 (Oldenburg)

An einem Tag wurden die folgenden Temperaturen gemessen:

Uhrzeit/h	6	10	14	18	22
Temperatur/°C	14	21	24	22	17

In einer Aufgabe dazu sollen Schüler den Verlauf durch eine passende Funktion modellieren.

(a) Ein Schüler nähert diese Werte durch eine quadratische Funktion an, ein anderer durch eine Sinusfunktion. Geben Sie *begründet*, aber ohne große Mühe in das Finden einer optimalen Lösung, an, welche Funktionen die Schüler gewählt haben könnten.

(b) Erläutern Sie, auch am Beispiel aus a), welche Schwierigkeiten bei der und welche Möglichkeiten zur Bewertung von Modellbildungsaufgaben es gibt.

(2 Punkte)

Lösungsskizze: —