

Skript zur Vorlesung

Darstellungstheorie (2std.)

**Sommersemester 2013
Frankfurt am Main**

Prof. Dr. Martin Möller

Stand: 9. Juli 2013

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
2	Multilineare Algebra	3
2.1	Tensorprodukte	3
2.2	Äußere und symmetrische Produkte	6
3	Darstellungen	9
4	Charaktere	13
4.1	Orthogonalitätsrelationen	13
4.2	Charaktertafeln und Beispiele	16
4.3	Restriktion und Induktion von Darstellungen	19
5	Young-Diagramme	23
5.1	Partitionen	24
5.2	Der Gruppenring	25
5.3	Die Frobenius-Charakterformel	26
5.4	Symmetrische Polynome	32
6	Schur-Funktoren	40

Vorwort

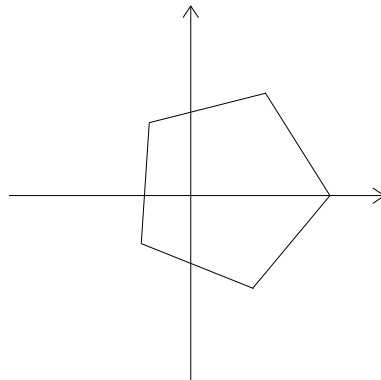
Dies ist ein Skript zu einer Vorlesung „Darstellungstheorie“ in Frankfurt/Main im SoSe 2013. Sie baut auf einer Vorlesung „Grundlagen der Algebra“ auf, in der grundlegende Begriffe wie Gruppen und Gruppenoperationen eingeführt wurden. Aus der Vorlesung Algebra wird der Begriff des Moduls verwendet. Siehe dazu z.B. das Skript „Algebra“ oder eines der vielen Bücher mit diesem Titel.

Quellen und Literatur: Literatur zur Darstellungstheorie und zu den dazu benötigten Begriffen der Algebra gibt es viel. Diese Vorlesung wurde zumeist folgenden Büchern entnommen:

- S. Lang: „Algebra“ (Addison-Wesley)
- W. Fulton, J. Harris: „Algebra“ (Springer)
- R. Stanley: „Enumerative Combinatorics“ (Springer)

1 Einführung

Die Symmetriegruppe des regelmäßigen 5-Ecks wird erzeugt von zwei Elementen.



$$\tau = \begin{pmatrix} \cos 2\pi/5 & \sin 2\pi/5 \\ -\sin 2\pi/5 & \cos 2\pi/5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

der Rotation τ um den Winkel $2\pi/5$ und der Spiegelung σ an der x -Achse. Da $\tau^5 = \text{id}$, $\sigma^2 = \text{id}$ und $\tau\sigma = \sigma\tau^{-1}$ gilt, erzeugen diese Elemente eine Diedergruppe D_5 . Diese Gruppe operiert aber nicht auf dem 5-Eck, sondern auf dem Vektorraum \mathbb{R}^2 , in dem das 5-Eck eingebettet ist. Die Operation wurde oben in der Tat als Matrizen, d.h. als Operation auf \mathbb{R}^2 angegeben. Der entsprechende Homomorphismus

$$\varphi: D_5 \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}^2) = \text{GL}_2(\mathbb{R})$$

ist das erste Beispiel einer Darstellung. In vielen Fällen liegt einer Operation einer Gruppe auf einem Objekt (zum Beispiel einem Kristall) eine Operation auf einem Vektorraum zugrunde. Darstellungen von Gruppen sind daher weit verbreitet.

Hat man eine Darstellung, so fragt man sich häufig, ob ein Untervektorraum von der Gruppe in sich überführt wird. Wenn ja, so nennt man die Darstellung reduzibel, andernfalls irreduzibel. Die Klassifikation von irreduziblen Darstellungen endlicher Gruppen ist das erste Hauptziel der Vorlesung. Auf dem Weg dahin werden wir verschiedene Methoden kennenlernen aus einer (oder zwei) Darstellung(en) weitere zu bauen.

Die Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe S_n ist sehr reichhaltig, was daran liegt, dass S_n „alles andere als abelsch“ ist. Darstellungen der symmetrischen Gruppe helfen beim Lösen vieler kombinatorischer Fragen. Diese Übersetzungsmechanismen sind das zweite Hauptziel der Vorlesung.

2 Multilineare Algebra

In diesem Abschnitt wollen wir Konstruktionen zusammenfassen, aus zwei K -Vektorräumen V und W weitere K -Vektorräume zu basteln. Als bekannt nehmen wir den Begriff des Vektorraums linearer Abbildungen $\text{Hom}_K(V, W)$ (oder kurz $\text{Hom}(V, W)$) an, welcher für $W = K$ den Begriff des Dualraums $V^* = \text{Hom}_K(V, W)$ beinhaltet.

Es ist langfristig nützlich V und W nur als R -Moduln für einen beliebigen Ring R anzunehmen und alle Konstruktionen dementsprechend zu verallgemeinern.

2.1 Tensorprodukte

Seien V und W zwei R -Moduln. Unter dem Tensorprodukt $V \otimes W$ sollte man sich einen R -Modul vorstellen, der von $\{b_i \otimes c_j, i \in I, j \in J\}$ erzeugt ist, wobei $\{b_i, i \in I\}$ eine Basis von V und $\{c_j, j \in J\}$ eine Basis von W ist. Für Vektorräume (und freie R -Moduln) ist diese Intuition korrekt, wie wir bald sehen. Und falls die Moduln nicht frei sind? Außerdem ist bei dieser Definition unklar, ob sie überhaupt unabhängig von der Basiswahl ist. Wir definieren daher das Tensorprodukt über eine *universelle Abbildungseigenschaft*. Objekte, die so definiert sind, sind automatisch bis auf Isomorphie eindeutig. Allerdings müssen wir erst zeigen, dass ein Tensorprodukt, wie in der Definition gefordert, überhaupt existiert.

Definition 2.1 Ein R -Modul M heißt Tensorprodukt von V und W , falls es eine R -bilineare Abbildung $\varphi_M = \varphi: V \times W \rightarrow M$ gibt und falls zu jedem anderen Paar (Z, φ_Z) aus einem R -Modul Z und einer bilinearen Abbildung $\varphi_Z: V \times W \rightarrow Z$ genau eine R -lineare Abbildung $h: M \rightarrow Z$ mit $\varphi_Z = h \circ \varphi$ gibt.

Falls es so ein M gibt, so schreiben wir $M = V \otimes W$. Ist der zugrunde liegende Ring nicht klar aus dem Kontext, so schreibt man auch $M = V \otimes_R W$. Es folgt direkt aus der Definition, dass das Tensorprodukt bis auf Isomorphie eindeutig ist: Wir nehmen an, dass M_1 und M_2 beides Tensorprodukte sind, dann gibt es nach dem zweiten Teil der Definition R -lineare Abbildungen $h_1: M_1 \rightarrow M_2$ und $h_2: M_2 \rightarrow M_1$, sodass $\varphi_{M_2} = h_1 \circ \varphi_{M_1}$ und $\varphi_{M_1} = h_2 \circ \varphi_{M_2}$. Wir müssen noch zeigen, dass $h_2 \circ h_1 = \text{id}_{M_1}$ und $h_1 \circ h_2 = \text{id}_{M_2}$ gilt. Nun sind sowohl id_{M_1} als auch $h_2 \circ h_1$ Abbildungen $M_1 \rightarrow M_1$, sodass $\varphi_{M_1} = \text{id}_{M_1} \circ \varphi_{M_1}$ (trivialerweise) und $\varphi_{M_1} = h_2 \circ h_1 \circ \varphi_{M_1}$ (als Konsequenz der beiden obigen Verkettungsregeln). Nun besagt die

Eindeutigkeitsaussage in der Definition die gewünschte Gleichheit und die für id_{M_2} zeigt man analog.

Proposition 2.2 *Das Tensorprodukt existiert für zwei beliebige R -Moduln V und W .*

Beweis : Sei F der freie R -Modul erzeugt von allen Paaren (v, w) mit $v \in V$ und $w \in W$. Sei N der Untermodul erzeugt von den Elementen

$$(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w), (v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2) \\ (av, w) - a(v, w), (v, aw) - a(v, w)$$

wobei $v, v_1, v_2 \in V, w, w_1, w_2 \in W$ und $a \in R$. Sei nun $M = F/N$ der Quotientenmodul und φ die Verkettung von $\varphi_0: V \times W \rightarrow F, (v, w) \mapsto (v, w)$ und der Projektion π . Der Untermodul wurde gerade so gebastelt, dass φ bilinear ist. Wir zeigen nun die zweite Eigenschaft der Definition. Sei (Z, φ_Z) wie dort. Wir definieren $h_0: F \rightarrow Z$ durch $h_0((v, w)) = \varphi_Z(v, w)$. Dies ist wohldefiniert und bestimmt h_0 eindeutig, da F frei ist. Da φ_Z multilinear ist, folgt $h_0(N) = 0$. Nach dem Homomorphiesatz gibt es also $h: F/N \rightarrow Z$ mit $h \circ \pi = h_0$ und es gilt $h \circ \varphi = \varphi_Z$. Zur Eindeutigkeit von h ist noch festzuhalten, dass die Bedingung $h \circ \varphi = \varphi_Z$ erzwingt, dass $h(\overline{(v, w)}) = \varphi_Z((v, w))$ und da die Elemente (v, w) mit $v \in V$ und $w \in W$ den R -Modul F und damit F/N erzeugen, folgt die Behauptung. \square

Wir schreiben $v \otimes w$ für die Restklasse von (v, w) in $V \otimes W$. Als Übung zeige man, dass $(u, v) \mapsto (v, u)$ einen Isomorphismus $V \otimes W \rightarrow W \otimes V$ induziert. Ist U ein weiterer R -Modul, so zeige man, dass $U \otimes (V \otimes W)$ zu $(U \otimes V) \otimes W$ isomorph ist, weswegen man die Klammern üblicherweise weglässt.

Wir erwähnen nur am Rande das weniger intuitive Verhalten von Tensorprodukten bei Torsionsmoduln. Sei $R = \mathbb{Z}$ und $V = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sowie $W = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Dann ist $V \otimes_R W = \{0\}$.

Sind $f: V_1 \rightarrow V_2$ und $g: W_1 \rightarrow W_2$ zwei Homomorphismen von R -Moduln, so erhält man als Verkettung von $f \times g: V_1 \times W_1 \rightarrow V_2 \times W_2$ und der kanonischen Abbildung $V_2 \times W_2 \rightarrow V_2 \otimes W_2$ eine Abbildung $V_1 \times W_1 \rightarrow V_2 \otimes W_2$. Diese ist offenbar bilinear, sodass die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts eine Abbildung $f \otimes g$ liefert, welche das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times W_1 & \longrightarrow & V_1 \otimes W_1 \\ f \times g \downarrow & & \downarrow f \otimes g \\ V_2 \times W_2 & \longrightarrow & V_2 \otimes W_2 \end{array}$$

kommutativ macht. Wir wenden diese Konstruktion wie folgt an.

Proposition 2.3 Sei $U = V \oplus W$ eine direkte Summe von R -Moduln und Z ein weiterer R -Modul. Dann ist

$$Z \otimes U \cong (Z \otimes V) \oplus (Z \otimes W).$$

Beweis : Ein R -Modul U ist genau dann eine direkte Summe, falls es Abbildungen (Projektionen) $\pi_W: U \rightarrow W$ und $\pi_V: U \rightarrow V$ gibt mit den Eigenschaften

$$\pi_W \circ \pi_W = \pi_W, \pi_V \circ \pi_V = \pi_V, \pi_V \circ \pi_W = 0, \pi_V + \pi_W = \text{id}$$

Wir wollen zeigen, dass $\text{id}_Z \otimes \pi_W: Z \otimes U \rightarrow Z \otimes W$ und $\text{id}_Z \otimes \pi_V: Z \otimes U \rightarrow Z \otimes V$ den analogen Relationen genügt. Wir führen dies exemplarisch für die erste Relation im Detail aus. Die Abbildung $\text{id}_Z \otimes \pi_W$ lässt nach Konstruktion die beiden inneren Quadrate des folgenden Diagramms kommutieren.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id}_Z \otimes \pi_W & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 Z \times U & \xrightarrow{\text{id}_Z \otimes \pi_W} & Z \times W & \xrightarrow{\text{id}_Z \otimes \pi_W} & Z \times W \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 Z \otimes U & \xrightarrow{\text{id}_Z \otimes \pi_W} & Z \otimes W & \xrightarrow{\text{id}_Z \otimes \pi_W} & Z \otimes W \\
 & & \text{id}_Z \otimes \pi_W & & \\
 & & \curvearrowleft & &
 \end{array}$$

Da die obere Linse wegen der Eigenschaft von π_W kommutiert, kommutieren auch der äußere Rahmen des Diagramms und damit ist $\text{id}_Z \otimes \pi_W = (\text{id}_Z \otimes \pi_W)^2$, was zu zeigen war. \square

Iteriert man das Argument, so erhält man die gleiche Aussage für endliche direkte Summen (mit etwas Sorgfalt auch für beliebige direkte Summen, was wir jedoch nicht benötigen).

Korollar 2.4 Sind V und W frei mit $\text{Rang}(V) = m$ und $\text{Rang}(W) = n$, so ist $\text{Rang}(V \otimes W) = m \cdot n$.

Beweis : Wir verwenden $V \cong R^m, W \cong R^n, R \otimes R \cong R$ und die Zerlegung aus der vorigen Proposition in beiden Argumenten. \square

2.2 Äußere und symmetrische Produkte

Die Tensorprodukte eines R -Moduls V mit sich selbst haben gegenüber $V \otimes W$ die Zusatzstruktur einer Aktion der symmetrischen Gruppe. Für $\sigma \in S_n$ und $x_1 \otimes \dots \otimes x_n \in V^{\otimes n} := V \otimes \dots \otimes V$ (n -mal) definieren wir

$$\sigma(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(n)}$$

und setzen σ linear auf $V^{\otimes n}$ fort. Dann ist die n -te symmetrische Potenz von V definiert als

$$\text{Sym}^n(V) = V^{\otimes n} / \mathcal{I}_n, \text{ wobei } \mathcal{I}_n = \{x - \sigma(x), x \in V^{\otimes n}, \sigma \in S_n\}$$

Proposition 2.5 *Ist der R -Modul V frei vom Rang k mit Basis $\{v_1, \dots, v_k\}$, so ist*

$$B_n = \{v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \dots \otimes v_{i_n} : 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n \leq k\}$$

eine Basis von $\text{Sym}^n(V)$.

Beweis : Der Modul $V^{\otimes n}$ wird von Elementen $v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_n}$ (ohne Einschränkung an die Sortierung der Indices) aufgespannt. Jedes solche Element liegt in der Äquivalenzklasse von einem mit $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n \leq k$, also spannen die Elemente von B_n den Modul $\text{Sym}^n(V)$ auf. Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit konstruieren wir lineare Abbildungen $\text{Sym}^n(V) \rightarrow R$. Zu (i_1, i_2, \dots, i_n) sei $\tilde{\ell}_{i_1, \dots, i_n} : V^{\otimes n} \rightarrow R$ gegeben durch die Werte auf einer Basis

$$\tilde{\ell}_{i_1, \dots, i_n}(v_{j_1} \otimes \dots \otimes v_{j_n}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \exists \sigma \in S_n : i_{\sigma(t)} = j_t \text{ für } t = 1, \dots, n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Abbildung bildet \mathcal{I}_n nach Null ab, steigt also zu einer Abbildung $\ell_{i_1, \dots, i_n} : \text{Sym}^n(V) \rightarrow R$ ab. Für $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n$ bildet ℓ_{i_1, \dots, i_n} genau ein Element von B_n auf 1 ab, alle anderen auf 0. Daraus folgt die Behauptung. \square

Proposition 2.6 *Sind V und W freie R -Moduln von endlichem Rang, so ist*

$$\text{Sym}^n(V \oplus W) \cong \bigoplus_{p+q=n} \left(\text{Sym}^p(V) \otimes \text{Sym}^q(W) \right).$$

Beweis : Nach der vorigen Proposition wird der Summand $\text{Sym}^p(V) \otimes \text{Sym}^q(V)$ der rechten Seite frei erzeugt von Elementen der Form $(v_1 \otimes \dots \otimes v_p) \otimes (w_1 \otimes \dots \otimes w_q)$. Dieses können wir als Element von $(V \oplus W)^{\otimes n}$ auffassen. Dessen Äquivalenzklasse

in $\text{Sym}^n(V \oplus W)$ hängt nicht von der Wahl des Vertreters ab. Lineare Fortsetzung definiert eine R -lineare Abbildung

$$\varphi: \text{Sym}^p(V) \otimes \text{Sym}^q(V) \longrightarrow \text{Sym}^n(V \oplus W).$$

Umgekehrt wird $\text{Sym}^n(V \oplus W)$ von Elementen $x = x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ mit $x_i = v_i \oplus w_i$ erzeugt. Also ist x Summe von Elementen der Bauart $y = y_1 \otimes \dots \otimes y_n$ mit $y_i \in V$ oder $y_i \in W$ für alle i . Modulo \mathcal{I}_n ist dies gleich einem Element mit $y_i \in V$ für $i \leq p$ und $y_i \in W$ für $i > p$. Dieses Element ist bis auf Permutation der ersten p und letzten $n - p$ Einträge das einzige Element dieser Bauart in der Klasse modulo \mathcal{I}_n . Wenn wir y auf

$$(y_1 \otimes \dots \otimes y_p) \otimes (y_{p+1} \otimes \dots \otimes y_n) \in \text{Sym}^p(V) \otimes \text{Sym}^{n-p}(W)$$

abbilden, so haben wir auf ganz $\text{Sym}^n(V \oplus W)$ eine Abbildung erklärt, die zu $\bigoplus_{p=0}^n \varphi_p$ invers ist. \square

Als Korollar zu Proposition 2.5 erhalten wir auch, dass für V frei von Rang k gilt

$$\dim \text{Sym}^n(V) = \binom{k + (n - 1)}{n} = \binom{k + n - 1}{k - 1}$$

(Man kann die Kardinalität von B_n abzählen, indem man $k - 1$ Trennsymbole und n Symbole für Basiselemente ungeordnet platziert.)

Wir betrachten nun das *äußere* (oder *alternierende*) *Produkt*. Sei dazu

$$J_n = \langle \{x_1 \otimes \dots \otimes x_r : \exists(i, j) : i \neq j \wedge x_i = x_j\} \rangle \subseteq V^{\otimes n}$$

und wir definieren $\Lambda^n(V) = V^{\otimes n} / J_n$. Man beachte, dass z.B. für $n = 2$ auch $(x_1 - x_2) \otimes (x_1 - x_2) \in J_2$ und somit $x_1 \otimes x_2 + x_2 \otimes x_1 \in J_2$. Dies macht den Begriff alternierend anschaulicher.

Man schreibt üblicherweise $v \wedge w$ für die Äquivalenzklasse von $v \otimes w$ modulo J_2 und analog für $n \geq 2$. Damit gilt also

$$v \wedge w = -w \wedge v.$$

Wir nennen eine multilineare Abbildung $f: V^n \longrightarrow W$ in einen R -Modul W *alternierend*, falls für alle i, j und alle $(x_1, \dots, x_n) \in V^n$ gilt

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n).$$

Auch das äußere Produkt lässt sich durch eine universelle Abbildungseigenschaft definieren: Wir nennen einen R -Modul M eine n -faches äußeres Produkt des R -Moduls V , falls es eine multilineare, alternierende Abbildung $f: V^n \rightarrow M$ gibt und falls es zu jedem Paar $(N, g: V^n \rightarrow N)$ bestehend aus einem R -Modul N und einer multilinearen, alternierenden Abbildung g genau eine R -lineare Abbildung $h: M \rightarrow N$ gibt mit $h \circ f = g$. (Der Nachweis, dass beide Definitionen äquivalent sind, verbleibt als Übung.)

Proposition 2.7 *Ist V frei vom Rang k mit Basis $\{v_1, \dots, v_k\}$, so ist*

$$C_n = \{v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_n} : i_1 < i_2 < \dots < i_n\}$$

eine Basis von $\Lambda^n V$. Insbesondere ist

$$\text{Rang } \Lambda^n V = \binom{k}{n}$$

Beweis : Da $v_1 \wedge v_2 = -v_2 \wedge v_1$ erzeugen die Elemente in C_n offenbar $\Lambda^n V$. Wir müssen noch für $n \leq k$ die lineare Unabhängigkeit nachweisen.

Für $k = n$ definiert die übliche Determinante eine von Null verschiedene Abbildung $\det: V^n \rightarrow R$ mit der Eigenschaft $\det(\dots, f_i, \dots, f_j, \dots) = -\det(\dots, f_j, \dots, f_i, \dots)$. Diese steigt also zu einer von Null verschiedenen Abbildung $\overline{\det}: \Lambda^n V \rightarrow R$ ab. (Damit haben wir zudem gezeigt, dass $\overline{\det}$ ein Isomorphismus ist.)

Für $1 \leq n < k$ betrachten wir zu gegebenen $\underline{w} = (w_{n+1}, \dots, w_k)$ die Abbildung

$$\varphi_{\underline{w}}: \Lambda^n V \rightarrow \Lambda^k V, \quad v_1 \wedge \dots \wedge v_n \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_n \wedge w_{n+1} \wedge \dots \wedge w_k.$$

Angenommen es gibt eine Relation

$$\sum_{|I|=n} a_I v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_n} = 0,$$

wobei jeder Multiindex $I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_n\}$ ist. Zu gegebenen I sei $I^C = \{1, \dots, n\} \setminus I = \{j_1, \dots, j_{k-n}\}$ aufsteigend geordnet. Wenn wir $\varphi_{\underline{w}(I)}$ mit $\underline{w} = (v_{j_1}, \dots, v_{j_{k-n}})$ auf diese Relation anwenden, tritt in jedem Summand ein v_i doppelt auf, mit einer Ausnahme. Es folgt also

$$0 = a_I v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_n} \wedge v_{j_1} \wedge \dots \wedge v_{j_{k-n}} = \pm a_I v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k.$$

Da wir soeben gezeigt haben, dass $v_1 \wedge \dots \wedge v_k \neq 0$ ist, muss $a_I = 0$ sein. Da I beliebig war, muss die Relation trivial gewesen sein und es folgt die Behauptung. \square

3 Darstellungen

In diesem Abschnitt führen wir grundlegende Beispiele von Darstellungen ein und basteln aus gegebenen Darstellungen neue. Ziel ist es, jede Darstellung in ihre „einfachsten Bestandteile“ zu zerlegen.

Definition 3.1 Sei G eine Gruppe und V ein K -Vektorraum. Eine Darstellung ist ein Gruppenhomomorphismus

$$\rho: G \longrightarrow GL_K(V).$$

Das einfachste Beispiel einer Darstellung ist die Abbildung $\rho(g) = \text{id}$ für alle $g \in G$, die *triviale Darstellung*. Ist $W \subseteq V$ ein Untervektorraum und ist $\rho(g)(W) = W$ für alle $g \in G$, so wird W ein G -invarianter Unterraum genannt. In diesem Fall ist

$$\rho|_W: G \longrightarrow GL_K(W), g \longmapsto w \longmapsto \rho(g)(w)$$

wieder eine Darstellung, auch *Teilraumdarstellung* genannt. Die Darstellungen auf dem Nullraum $W = \{0\}$ und auf ganz $W = V$ sind offensichtlich immer Teilraumdarstellungen einer Darstellung. Besitzt ρ keine weiteren Teilraumdarstellungen außer diesen beiden, so wird ρ *irreduzibel* (manchmal auch *einfach*) genannt. Beispielsweise ist die Darstellung der D_5 im einleitenden Beispiel irreduzibel. Ist ρ eine Darstellung und $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V , so ordnen wir $g \in G$ die $n \times n$ -Matrix $M_g = (m_{ij}(g))$ mit

$$\rho(g) \cdot v_i = \sum_{j=1}^n m_{ji}(g) \cdot v_j$$

zu. Die Reihenfolge der Indizes ist dabei so gewählt, dass die Zuordnung

$$g \longmapsto M_g$$

einen Gruppenhomomorphismus $\rho_{\text{Mat}}: G \longrightarrow GL_n(K)$ definiert, denn falls $\rho(h) = M_h = (m_{ij}(h))$, so gilt

$$\begin{aligned} \rho(h) \cdot (\rho(g)(v_i)) &= g(h) \left(\sum_{j=1}^n m_{ji}(g) \cdot v_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n m_{ji}(g) \sum_{k=1}^n m_{kj}(h) \cdot v_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n m_{kj}(h) m_{ji}(g) \right) \cdot v_k, \end{aligned}$$

also ist $M_h \cdot M_g$ die Darstellungsmatrix von $\rho(h \cdot g)$. Also können wir jede endlichdimensionale Darstellung (und diese interessieren uns hauptsächlich) als Matrixdarstellung auffassen.

Beispiel 3.2 Es ist $GL_1(K) = K^*$. Ist G endlich, so ist das Bild einer eindimensionalen Darstellung in der Menge der Einheitswurzeln $U_1 = \{z \in K : \exists n \in \mathbb{N} : z^n = 1\}$ enthalten, denn zu jedem $g \in G$ gibt es ein n mit $g^n = e$, also ist $\rho(g)^n = 1$. Ist $G = \langle g \rangle$ zyklisch der Ordnung n und gibt es in K eine n -te Einheitswurzel ξ_n (z.B. $K = \mathbb{C}$ und $\xi_n = e^{2\pi i/n}$) so wird durch $\rho(g) = \xi_n$ eine eindimensionale Darstellung definiert. Ist andererseits $\rho: G \rightarrow GL_1(K)$ eine eindimensionale Darstellung einer Gruppe, so ist das Bild abelsch. Ist also G nicht abelsch, so ist ρ nicht injektiv. Hieraus folgt zum Beispiel, dass die einzige eindimensionale Darstellung der A_n für $n \geq 5$ (welche einfach und nicht abelsch ist) die triviale Darstellung ist.

Wir klären nun, wann wir zwei Darstellungen als „gleich“ ansehen wollen. Seien also $\rho_1: G \rightarrow GL(V_1)$ und $\rho_2: G \rightarrow GL(V_2)$ zwei Darstellungen einer Gruppe G . Eine lineare Abbildung $f: V_1 \rightarrow V_2$ heißt G -linear, falls

$$\rho_2(g)(f(v)) = f(\rho_1(g)(v)) \quad \text{für alle } g \in G \text{ und } v \in V_1$$

gilt. Die zwei Darstellungen ρ_1 und ρ_2 heißen *isomorph*, falls es einen G -linearen Isomorphismus $f: V_1 \rightarrow V_2$ gibt. Die Menge aller G -linearen Abbildungen von V_1 nach V_2 bildet einen Untervektorraum von $\text{Hom}_K(V_1, V_2)$, den wir mit $\text{Hom}_G(V_1, V_2)$ bezeichnen.

Lemma 3.3 Ist $f: V_1 \rightarrow V_2$ eine G -lineare Abbildung, so ist $\text{Ker}(f)$ ein G -invarianter Unterraum von V_1 und $\text{Bild}(f)$ ein G -invarianter Unterraum von V_2 .

Beweis : Ist $w = f(v) \in \text{Bild}(f)$, so ist für beliebiges $g \in G$

$$\rho_2(g)(w) = \rho_2(g)(f(v)) = f(\rho_1(g)(v)) \in \text{Bild}(f).$$

Ist $f(v) = 0$, so ist

$$f(\rho_1(g)(v)) = \rho_2(g)(f(v)) = \rho_2(g)(0) = 0.$$

Damit folgt, dass es zwischen den Darstellungen, die uns primär interessieren, nur wenige Isomorphismen gibt. □

Satz 3.4 (Schurs Lemma) Sind ρ_1 und ρ_2 zwei irreduzible Darstellungen von G und ist $f: V_1 \rightarrow V_2$ G -linear und nicht Null, so ist f ein Isomorphismus. Ist K algebraisch abgeschlossen und $V_1 = V_2$, so gibt es ein $\lambda \in K$ mit $f(v) = \lambda \cdot v$, d.h.

$$\text{Hom}_G(V, V) \cong K.$$

Beweis : Die erste Aussage folgt unmittelbar aus der Irreduzibilität und dem vorigen Lemma. Zum Beweis der zweiten Aussage sei λ ein Eigenwert von f mit zugehörigem Eigenvektor v_0 . Mit f ist auch $\tilde{f}(v) = f(v) - \lambda v$ G -linear und $v_0 \in \text{Ker}(\tilde{f})$. Also ist $\tilde{f} = 0$ und daraus folgt die Behauptung. \square

Aus einfachen Darstellungen ρ_1 und ρ_2 von G erhält man eine Darstellung $\rho_1 \oplus \rho_2$ auf $V_1 \oplus V_2$ durch

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(v_1, v_2) = (\rho_1(g)(v_1), \rho_2(g)(v_2)).$$

Nächstes Ziel ist zu zeigen, dass bei endlichen Gruppen jede Darstellung als Summe von einfachen Darstellungen geschrieben werden kann. Um dies Wert zu schätzen, betrachten wir die nicht-endliche Gruppe \mathbb{Z} und $V = \mathbb{R}^2$ mit der Darstellung $\rho(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ ein G -invarianter Unterraum (und $g|_W$ trivial), aber es gibt keinen weiteren G -invarianten Unterraum (außer $\{0\}$ und V).

Satz 3.5 (Maschke) Sei $\rho: G \rightarrow GL(V)$ eine Darstellung einer endlichen Gruppe und $\text{char}(K) \nmid |G|$. Ist W ein G -invarianter Unterraum, so gibt es eine G -lineare Projektion $p: V \rightarrow W$. Folglich gibt es ein G -invariantes Komplement W' (d.h. $V = W \oplus W'$) und $\rho = \rho|_W \oplus \rho|_{W'}$.

Beweis : Entscheidend ist, dass wir bei endlichen Gruppen einen Mittelwert bilden können. Sei also $p_0: V \rightarrow W$ eine beliebige Projektion. Dann ist für jedes $g \in G$ auch $p_0^g := \rho(g) \circ p_0 \circ (\rho(g))^{-1}$ eine Projektion, denn für $w \in W$ ist $p_0^g(w) = p_0(w)$ und $(p_0^g)^2(v) = p_0^g(v)$. Also ist auch

$$p(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} p_0^g$$

eine Projektion. diese ist zudem G -invariant, denn

$$\begin{aligned} p(\rho(g)(v)) &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \rho(h) p_0 (\rho(h))^{-1} \rho(g)(v) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \rho(g) \rho(g^{-1}h) p_0 (\rho(g^{-1}h))^{-1} (v) \\ &= \rho(g) \left(\frac{1}{|G|} \sum_{\tilde{h} \in G} \rho(\tilde{h}) p_0 (\rho(\tilde{h}))^{-1} (v) \right). \end{aligned}$$

Zum Beweis der zweiten Aussage nimmt man $W' = \text{Ker}(p)$. □

Induktive Anwendung ergibt:

Korollar 3.6 Ist V endlich dimensional und $\rho: G \rightarrow GL(V)$ eine Darstellung einer endlichen Gruppe und $\text{char}(K) \nmid |G|$, so gibt es eine Zerlegung $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_n$ in G -invariante Unterräume, sodass $\rho = \rho|_{W_1} \oplus \dots \oplus \rho|_{W_n}$ eine Summe von einfachen Darstellungen ist.

Beispiel 3.7 Sei X eine endliche Menge, auf der G operiert. Sei $V = \bigoplus_{x \in X} K \cdot x$ der K -Vektorraum mit Basis X . Dann ist durch $\rho: G \rightarrow GL(V)$, $\rho(g): x \mapsto g \cdot x$ eine Darstellung definiert. Ist $G = X$ und die Operation die Linksmultiplikation, so nennt man die zugehörige $|G|$ -dimensionale Darstellung die *reguläre Darstellung* von G .

Beispiel 3.8 $G = S_3$ operiert auf $X = \{1, 2, 3\}$ in natürlicher Weise. Die zugehörige Matrixdarstellung ist gegeben auf Erzeugern von S_3 durch

$$\rho_{\text{nat}}: (12) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (123) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Darstellung ist nicht irreduzibel, z.B. ist $\langle (1, 1, 1)^T \rangle$ ein nichttrivialer G -invarianter Unterraum.

Wenn wir die Elemente von S_3 mit $\{\text{id}, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ durchnummern, so ist die reguläre Darstellung von S_3 gegeben durch die Matrixdarstellung

$$\rho_{\text{reg}}: (12) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (123) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 3.9 Sei $\rho: G \rightarrow GL(V)$ eine Darstellung und $V^* = \text{Hom}_K(V, K)$ der Dualraum. Dann erhält eine Darstellung $\rho^*: G \rightarrow GL(V^*)$ durch $\rho^*(g) = (\varphi \mapsto \varphi \circ \rho(g^{-1}))$.

Insbesondere falls $\dim V = 1$ und $\rho(g)(v) = \xi \cdot v$, so ist

$$\rho^*(g)(v) = \xi^{-1} \cdot v = \bar{\xi} \cdot v,$$

wobei die letzte Gleichheit für $K = \mathbb{C}$ und G endlich gilt.

Dies ist nur ein Beispiel um aus einer Darstellung eine neue zu basteln. Ein weiteres ist die Tensorprodukt-Darstellung. Sind $\rho_i: G \rightarrow GL(V_i)$ für $i = 1, 2$ zwei Darstellungen, so definiert für jedes g die Abbildung $\varphi_1(g) \otimes \varphi_2(g)$ einen Automorphismus von $V_1 \otimes V_2$. Den daraus resultierenden Homomorphismus $G \rightarrow GL(V_1 \otimes V_2)$ bezeichnen wir mit $\rho_1 \otimes \rho_2$.

Ebenso erhält man als Kombination der beiden vorangehenden Überlegungen aus ρ_1 und ρ_2 eine Darstellung $\rho: G \rightarrow GL(\text{Hom}(V_1, V_2))$, denn es ist (Übung!)

$$(V_1^*) \otimes V_2 \cong \text{Hom}(V_1, V_2).$$

4 Charaktere

Ein *Charakter* einer endlichen Gruppe G (zu der endlichdimensionalen Darstellung $\rho: G \rightarrow GL(V)$) ist die Verkettungsabbildung:

$$\chi_\rho: G \rightarrow K, \chi_\rho(g) = \text{Sp}(\rho(g)).$$

Zunächst einmal spiegelt ein Charakter nicht den vollen Informationsgehalt einer Darstellung wieder, denn es gilt für alle $g, h \in G$

$$\chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g).$$

Abbildungen $G \rightarrow K$ dieser Art, d.h. die auf einer Konjugationsklasse den gleichen Wert annehmen, werden auch *Klassenfunktionen* genannt. Andererseits werden wir sehen, dass Charaktere irreduzible Darstellungen ziemlich gut charakterisieren.

4.1 Orthogonalitätsrelationen

Die Menge der Klassenfunktionen von G (mit Werten in K) bezeichnen wir mit $\text{Abb}(G, K)^G$. Diese Menge ist durch Addition und Skalarmultiplikation im Bild offenbar ein K -Vektorraum. Eine Basis hiervon besteht aus

$$\Delta_C(g) = \begin{cases} 1 & \text{falls } g \in C \\ 0 & \text{falls } g \notin C, \end{cases}$$

wobei C die Menge aller Konjugationsklassen von G durchläuft.

Wir wollen zeigen, dass Charaktere auch eine Basis dieses Vektorraums bilden. Zuvor notieren wir einige elementare Eigenschaften. Seien $\rho_i: G \rightarrow GL(V_i)$ zwei Darstellungen von G .

Satz 4.1 *i) Es ist $\chi_\rho(id) = \dim V$. Ist $K \subseteq \mathbb{C}$ und G endlich, so gilt $|\chi_\rho(g)| \leq \chi_\rho(id)$ für jede Darstellung ρ und jedes $g \in G$.*

ii) Die Summendarstellung $\rho_1 \oplus \rho_2$ auf $V_1 \oplus V_2$ hat den Charakter $\chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$.

iii) Die Tensorprodukt Darstellung $\rho_1 \otimes \rho_2$ auf $V_1 \otimes V_2$ hat den Charakter $\chi_{\rho_1} \cdot \chi_{\rho_2}$.

Beweis : Die erste Aussage ist klar. Für die zweite können wir genauso gut die zugehörige Darstellung betrachten, in der wir V als \overline{K} -Vektorraum auffassen. Über \overline{K} können wir $\rho(g)$ (für jedes feste $g \in G$ einzeln) diagonalisieren. Die einzelnen Diagonaleinträge λ_i sind n -te Einheitswurzeln, wobei $n = \text{ord}(g)$ ist. Dann ist

$$|\chi_\rho(g)| = \left| \sum_{i=1}^{\dim V} \lambda_i \right| \leq \sum_{i=1}^{\dim V} |\lambda_i| = \dim V.$$

Die zweite Aussage folgt, dass die Darstellungsmatrix der Summendarstellung eine Blockmatrix, bestehend aus den einzelnen Darstellungsmatrixen, und Null auf den Nebendiagonalen ist.

Für die dritte Aussage diagonalisieren wir $\rho_1(g)$ in der Basis v_1, \dots, v_m von V_1 , sodass $\rho_1(g)(v_i) = \lambda_i v_i$ und $\rho_2(g)$ in der Basis w_1, \dots, w_n von V_2 , sodass $\rho_2(g)(w_i) = \mu_i w_i$ (ebenfalls nach Übergang zu \overline{K}). Aus der Basis $v_i \otimes w_j$ von $V_1 \otimes V_2$ wirkt $\rho_1 \otimes \rho_2$ durch

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g)(v_i \otimes w_j) = \lambda_i \mu_j (v_i \otimes w_j).$$

Die Spur dieser Darstellungsmatrix ist gleich

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j = \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \mu_j \right),$$

was zu zeigen war. □

Da G endlich vorausgesetzt ist, können wir auf $\text{Abb}(G, \mathbb{C})^G$ durch Mitteln ein hermitesches Skalarprodukt definieren. Dazu setzen wir für $\alpha, \beta \in \text{Abb}(G, \mathbb{C})^G$

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) \overline{\beta(g)}.$$

Wir geben eine weitere Interpretation, die diese Definition noch natürlicher erscheinen lässt.

Mit dem gleichen Argument der Wahl einer Eigenbasis zeigt man zunächst unter Verwendung von Beispiel 3.9:

Lemma 4.2 Ist $\rho: G \rightarrow GL(V)$ eine Darstellung einer endlichen Gruppe G auf einem \mathbb{C} -Vektorraum V , so gilt $\chi_{\rho^*} = \overline{\chi_\rho}$.

Proposition 4.3 Sind $\rho_1: G \rightarrow GL(V_1)$ und $\rho_2: G \rightarrow GL(V_2)$ zwei Darstellungen und ρ die natürliche Tensorprodukt-Darstellung auf $\text{Hom}(V_1, V_2) \cong V_1^* \otimes V_2$, so gilt

$$\langle \chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_2} \rangle = \text{Sp}(\rho) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g) = \dim \text{Hom}_G(V_1, V_2)$$

Beweis : Folgt aus Satz 4.1 iii) und Lemma 4.2. □

Sind ρ_1 und ρ_2 irreduzibel, so folgt aus Schurs Lemma und dieser Proposition, dass $\langle \chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_2} \rangle = 0$, falls ρ_1 und ρ_2 nichtäquivalent sind und mit Hilfe von Satz 4.1 i), dass $\langle \chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_2} \rangle = 1$, falls ρ_1 und ρ_2 äquivalent sind. Die Menge der Charaktere ist also orthonormal für das Skalarprodukt auf $\text{Abb}(G, \mathbb{C})^G$.

Satz 4.4 Sei $K = \overline{K}$ algebraisch abgeschlossen. Die Menge der Charaktere inäquivalenter irreduzibler Darstellungen bildet eine Orthonormalbasis von $\text{Abb}(G, K)^G$. Insbesondere gibt es eine Bijektion zwischen Charakteren inäquivalenter irreduzibler Darstellungen und Konjugationsklassen von G .

Beweis : Wir nehmen an, dass für $\alpha \in \text{Abb}(G, K)^G$ die Eigenschaft $\langle \alpha, \chi_\rho \rangle = 0$ für alle irreduziblen Darstellungen ρ von G . Nach den Vorbemerkungen genügt es zu zeigen, dass $\alpha = 0$ ist. Zu α und ρ konstruieren wir die lineare Abbildung

$$\varphi = \varphi_{\alpha, \rho}: V \rightarrow V, v \mapsto \sum_{g \in G} \alpha(g) \cdot \rho(g)(v).$$

Diese ist in der Tat G -linear, denn für alle $h \in G$ und $v \in V$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi(\rho(h)(v)) &= \sum_{g \in G} \alpha(g) \rho(g) \rho(h)(v) &&= \rho(h) \sum_{g \in G} \alpha(g) \rho(h^{-1}gh)(v) \\ &= \rho(h) \sum_{g \in G} \alpha(h^{-1}gh) \rho(h^{-1}gh)(v) &&= \rho(h) \sum_{g \in G} \alpha(g) \rho(g)(v) \\ &= \rho(h) \varphi(v). \end{aligned}$$

Ist ρ irreduzibel der Dimension $\dim \rho = n$, so gibt es nach Schurs Lemma ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\varphi_{\rho, \alpha} = \lambda \cdot \text{id}_V$. Also ist

$$\text{Sp}(\varphi_{\rho, \alpha}) = \sum_{g \in G} \alpha(g) \text{Sp}(\rho(g)) = \sum_{g \in G} \alpha(g) \chi_\rho(g) = |G| \langle \alpha, \chi_{\rho^*} \rangle,$$

also $\lambda = |G| \langle \alpha, \chi_{\rho^*} \rangle / n$. Aus der Voraussetzung $\langle \alpha, \chi_{\rho} \rangle = 0$ für alle irreduziblen ρ , folgt also $\varphi_{\alpha, \rho} = 0$ für alle solchen ρ . Daraus folgt auch $\varphi_{\alpha, \rho} = 0$ für alle ρ , da sich jedes ρ als Summe von irreduziblen Darstellungen schreiben lässt. Wir verwenden nun $\varphi_{\text{reg}} = \varphi_{\alpha, \rho_{\text{reg}}}$ konstruiert aus der regulären Darstellung. Dann gilt

$$0 = \varphi_{\text{reg}}(e) = \sum_{g \in G} \alpha(g) \rho_{\text{reg}}(g)(e) = \sum_{g \in G} \alpha(g) \cdot g.$$

Da die $g \in G$ eine Basis des zugrunde liegenden Vektorraums der regulären Darstellung bilden, muss $\alpha(g) = 0$ für jedes $g \in G$ sein. Das war zu zeigen. \square

Man beachte, dass in diesem Satz Bijektion nur „gleiche Mächtigkeit“ bedeutet. Der Beweis liefert keine kanonische Art zu einer Konjugationsklasse ℓ eine Darstellung ρ_{ℓ} zu assoziieren.

4.2 Charaktertafeln und Beispiele

Eine Tabelle, deren Zeilen mit den Konjugationsklassen von G , deren Spalten mit den irreduziblen Darstellungen von G durchnummeriert sind und deren Einträge die Charaktere der Gruppe sind, wird Charaktertafel genannt. Wir beginnen mit dem Beispiel $G = S_3$. Neben der trivialen Darstellung besitzt S_n stets den Homomorphismus sign , welchen wir als eindimensionale Darstellung auffassen können. Wir kennen also die ersten Zeilen der Charaktertafel und können die dritte Zeile durch Orthonormalität ergänzen.

S_3	id	(12)	(123)
χ_{tr}	1	1	1
χ_{sign}	1	-1	1
χ_3	a	b	c

Aus $|a|^2 + 3|b|^2 + |c|^2 = |S_3| = 6$, $a + 3b + 2c = 0$ und $a - 3b + 2c = 0$ folgt $a = 2$, $b = 0$, $c = -1$.

Für die natürliche Darstellung von S_3 auf einem 3-dimensionalen Vektorraum erhält man

$$\chi_{\text{nat}}(\text{id}) = 3, \quad \chi_{\text{nat}}(12) = 1, \quad \chi_{\text{nat}}(123) = 0$$

und somit ist diese die Summe aus der trivialen Darstellung und der (noch nicht spezifizierten) dritten Darstellung. Man gewinnt diese also durch Wahl eines G -invarianten Komplements von $(1, 1, 1)^{\top}$.

Bisher haben wir die Orthonormalität der Zeilen der Charaktertafel gezeigt, d.h. sind χ_1, \dots, χ_r die verschieden irreduziblen Charaktere und g_1, \dots, g_r Vertreter der Konjugationsklassen, so gilt für alle $i, j \in \{1, \dots, r\}$,

$$\sum_{k=1}^r \chi_i(g_k) \overline{\chi_j(g_k)} \cdot \frac{|C_G(g_k)|}{|G|} = \delta_{ij}.$$

Es gilt auch die Spaltenorthonormalität.

Proposition 4.5 Für $i, j \in \{1, \dots, r\}$ gilt

$$\sum_{k=1}^r \chi_k(g_i) \overline{\chi_k(g_j)} \cdot \frac{|C_G(g_i)|}{|G|} = \delta_{ij}.$$

Beweis : Zu $s \in \{1, \dots, r\}$ sei $\psi_s \in \text{Abb}(G, K)^G$ definiert durch Eins auf der Konjugationsebene von g_s und Null sonst. Da die Charaktere eine Basis von $\text{Abb}(G, K)^G$ bilden, gibt es λ_k , sodass $\psi_s = \sum_{k=1}^r \lambda_k \chi_k$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \langle \psi_s, \chi_j \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi_s(g) \overline{\chi_j(g)} \\ &= \sum_{k=1}^r \lambda_k \sum_{g \in G} \chi_k(g) \overline{\chi_j(g)} = \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{|C_G(g_k)|}{|G|} \overline{\chi_j(g_s)} = \overline{\chi_j(g_s)} \cdot \frac{|C_G(g_s)|}{|G|}, \end{aligned}$$

also insgesamt

$$\delta_{st} = \psi_s(g_t) = \sum_{k=1}^r \lambda_k \chi_k(g_t) \overline{\chi_k(g_s)} \cdot \frac{|C_G(g_s)|}{|G|},$$

was nach komplexer Konjugation die behauptete Formel ergibt. □

Bei einer zyklischen Gruppe der Ordnung n hatten wir bereits n verschiedene eindimensionale Darstellungen angegeben. Andererseits hat eine solche Gruppe genau n Konjugationsklassen, sodass wir alle irreduziblen Darstellungen und damit die Charaktertafel bereits kennen. Dies gilt auch allgemeiner für abelsche Gruppen.

Proposition 4.6 Alle irreduziblen Darstellungen einer abelschen Gruppe sind eindimensional.

Beweis : Die Gruppenordnung ist gleich der Anzahl der Konjugationsklassen und nach Spaltenorthonormalität gilt

$$|G| = \sum_{i=1}^{|G|} |\chi_i(\text{id})|^2 = \sum_{i=1}^{|G|} \dim(\rho_i)^2.$$

□

Beispiel 4.7 Wir wollen die Charakertafel für $G = S_4$ erstellen. Vertreter der Konjugationsklassen sind id , (12) , $(12)(34)$, (123) und (1234) , wobei die Mächtigkeit der Konjugationsklasse respektive 1, 6, 3, 8 und 6 ist. Es gibt also 5 irreduzible Darstellungen, wovon wir zwei eindimensionale Darstellungen, die triviale und das Signum bereits kennen. Die natürliche Darstellung χ_{nat} von S_4 auf $\{1, 2, 3, 4\}$ hat den Charakter ($\chi_{\text{nat}} := \chi_{\rho_{\text{nat}}}$)

$$\chi_{\text{nat}}(\text{id}) = 4, \chi_{\text{nat}}(12) = 2, \chi_{\text{nat}}((12)(34)) = 0, \chi_{\text{nat}}(123) = 1, \chi_{\text{nat}}(1234) = 0.$$

Sei ρ_3 das Komplement der trivialen Darstellung in ρ_{nat} . Deren Charakter ist ($\chi_3 := \chi_{\rho_3}$)

$$\chi_3(\text{id}) = 3, \chi_3((12)) = 1, \chi_3((12)(34)) = -1, \chi_3((123)) = 0, \chi_3(1234) = -1.$$

Also ist

$$\langle \chi_3, \chi_3 \rangle = \frac{1}{24}(9 + 6 + 3 + 0 + 6) = 1$$

und χ_3 damit irreduzibel.

Sei $\rho_4 = \rho_3 \otimes \rho_{\text{sign}}$ das Tensorprodukt mit der Signumdarstellung. Dann hat $\chi_4 = \chi_{\rho_4}$ auch die Eigenschaft $\langle \chi_4, \chi_4 \rangle = 1$, also ist χ_4 ebenfalls irreduzibel.

Die Einträge der letzten Zeile der Charakertafel folgen aus den Orthogonalitätsrelationen.

	id	(12)	(12)(34)	(123)	(1234)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	3	1	-1	0	-1
χ_4	3	-1	-1	0	1
χ_5	2	0	2	-1	0.

Um die Darstellung ρ_5 mit $\chi_5 = \chi_{\rho_5}$ tatsächlich zu konstruieren, kann man die reguläre Darstellung verwenden und folgende Proposition.

Proposition 4.8 Sind ρ_1, \dots, ρ_r die verschiedenen irreduziblen Darstellungen einer Gruppe G und χ_i die zugehörigen Charaktere, so ist

$$\rho_{\text{reg}} = \bigoplus_{i=1}^r \chi_i(e) \cdot \rho_i$$

Beweis: Es ist $\chi_{\text{reg}}(g) = |G|$, falls $g = e$ und $\chi_{\text{reg}}(g) = 0$ sonst. Also ist die Vielfachheit von ρ_i in ρ_{reg} gleich

$$\langle \chi_{\text{reg}}, \chi_i \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\text{reg}}(g) \overline{\chi_i(g)} = \frac{1}{|G|} \chi_{\text{reg}}(e) \overline{\chi_i(e)} = \chi_i(e).$$

□

Wir werden noch geschicktere Methoden zur Konstruktion von ρ_r kennenlernen, als dies vermöge

$$2\chi_5 = \chi_{\rho_{\text{reg}}} - \chi_1 - \chi_2 - 3\chi_3 - 2\chi_4$$

aus der regulären Darstellung herauszudestillieren.

4.3 Restriktion und Induktion von Darstellungen

Bisher haben wir Darstellungen einer Gruppe G betrachtet. Wir untersuchen nun den Übergang zu einer Untergruppe $H \leq G$. Ist $\rho: G \rightarrow GL(V)$ eine Darstellung, so ist auch die Einschränkung auf H eine Darstellung

$$\text{Res}_H^G(\rho) := \rho|_H : H \hookrightarrow G \rightarrow GL(V).$$

Die Umkehrung, Darstellungen von G aus denen von H zu gewinnen, ist interessanter. Sei ρ wieder eine Darstellung von G und $W \leq V$ ein H -invarianter Unterraum. Für jede Nebenklasse $\sigma \in G/H$ ist der Unterraum $\sigma \cdot W$ unabhängig von der Wahl des Vertreters. Wir sagen, dass V eine von H induzierte Darstellung ist, falls es so ein H -invariantes W gibt mit der Eigenschaft

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} \sigma W.$$

In diesem Fall schreiben wir $\rho = \text{Ind}_H^G \tau$, wobei $\tau = (\text{Res}_H^G(\rho))|_W$ die zugehörige H -Darstellung auf W ist. Gegeben τ , so ist die induzierte Darstellung eindeutig und daher verwenden wir ab sofort den bestimmten Artikel.

Proposition 4.9 *Ist $\tau: H \rightarrow GL(W)$ eine Darstellung, so gibt es genau eine Darstellung $\rho: G \rightarrow GL(V)$, sodass $\rho = \text{Ind}_H^G(\tau)$ ist.*

Beweis : Wir beginnen mit der Eindeutigkeit, welche die Idee für den Existenzbeweis liefert. Jedes $v \in V$ besitzt eine eindeutige Darstellung $v = \sum_{\sigma \in G/H} g_\sigma \cdot w_\sigma$, wobei $w_\sigma \in W$ und $g_\sigma \in G$ ein fest gewähltes Vertretersystem der Nebenklassen ist. Ist $g \in G$, so ist $g \cdot g_\sigma = g_{\sigma'} \cdot h_{g,\sigma}$ für eine geeignete Nebenklasse σ' und ein $h_{g,\sigma} \in H$, und diese Schreibweise von $g \cdot g_\sigma$ ist eindeutig. Also muss bei einer induzierten Darstellung $\rho = \text{Ind}_H^G(\tau)$ gelten:

$$\rho(g) \cdot v = \sum_{\sigma' \in G/H} g_{\sigma'} \cdot \tau(h_{g,\sigma})(w_\sigma). \tag{1}$$

Also ist ρ durch τ eindeutig spezifiziert.

Um zu zeigen, dass die Formel (1) wirklich eine Darstellung von G definiert, bleibt noch die Homomorphie zu zeigen, d.h. für beliebiges $\tilde{g} \in G$ gilt

$$\rho(\tilde{g})(\rho(g) \cdot g_\sigma w_\sigma) = \rho(\tilde{g} \cdot g)(g_\sigma \cdot w_\sigma).$$

Dazu schreiben wir die Aktion von \tilde{g} auf einer beliebigen der Nebenklassen $\sigma' \in G/H$ als $\tilde{g} \cdot g_{\sigma'} = g_{\sigma''} \cdot h_{\tilde{g}, \sigma'}$ und erhalten wegen

$$\tilde{g} \cdot g \cdot g_\sigma = \tilde{g} \cdot (g_{\sigma'} \cdot h_{g, \sigma}) = (g_{\sigma''} \cdot h_{\tilde{g}, \sigma'}) \cdot h_{g, \sigma}$$

die gewünschte Beziehung

$$\begin{aligned} \rho(\tilde{g})(\rho(g) \cdot g_\sigma w_\sigma) &= \rho(\tilde{g})(g_{\sigma'} \tau(h_{g, \sigma})(w_\sigma)) \\ &= g_{\sigma''} \cdot \tau(h_{\tilde{g}, \sigma'}) \tau(h_{g, \sigma}) w_\sigma = g_{\sigma''} \tau(h_{\tilde{g}, \sigma'} h_{g, \sigma}) w_\sigma \\ &= \rho(\tilde{g}g) g_\sigma w_\sigma. \end{aligned}$$

□

Beispiel 4.10 Die reguläre Darstellung einer Gruppe G ist die von der eindimensionalen Darstellung der Untergruppe $\{e\} \leq G$ induzierte Darstellung.

Dieses Beispiel zeigt auch, dass Induktion von Darstellungen die Eigenschaft Irreduzibilität nicht bewahrt.

Übung 4.11 i) Induktion ist transitiv, d.h. ist $K \leq H \leq G$ eine Kette von Untergruppen und $\tau: K \rightarrow GL(W)$ eine Darstellung, so ist

$$\text{Ind}_K^G(\tau) = \text{Ind}_H^G(\text{Ind}_K^H(\tau)).$$

ii) Ist $\rho: G \rightarrow GL(V)$ eine Darstellung von G und $\tau: H \rightarrow GL(W)$ eine Darstellung von H , so ist $\rho \otimes \text{Ind}_H^G(\tau) = \text{Ind}_H^G(\text{Res}_H^G(\rho) \otimes \tau)$.

Die folgende Aussage dient als Vorbereitung zum Berechnen des Charakters der induzierten Darstellung.

Proposition 4.12 Sind $\tau: H \rightarrow GL(W)$ und $\rho: G \rightarrow GL(V)$ Darstellungen von H resp. G , so lässt sich eine H -lineare Abbildung $f: W \rightarrow V$ in eindeutiger Weise zu einer G -linearen Abbildung $\tilde{f}: \text{Ind}_H^G(W) \rightarrow V$ fortsetzen, d.h. es ist

$$\text{Hom}_H(W, \text{Res}_H^G(V)) \cong \text{Hom}_G(\text{Ind}_H^G(W), V).$$

Beweis : Wenn wir $\text{Ind}_H^G(W) = \sum_{\sigma \in G/H} \sigma \cdot W$ schreiben, so definieren wir zu gegebenem $\varphi \in \text{Hom}_H(W, V)$ die Fortsetzung $\tilde{\varphi}$ auf $\tau \cdot W$ durch

$$\tilde{\varphi}(g_\sigma \cdot w) = \rho(g_\sigma)\varphi(w)$$

für $w \in W$ und einen Vertreter g_σ von $\sigma \in G/H$. Dies ist vertreterunabhängig, da φ eine H -lineare Abbildung ist. Die Umkehrabbildung wird durch $\tilde{\varphi} \mapsto \tilde{\varphi}|_W$ gegeben. \square

Korollar 4.13 Sind τ und ρ wie in der vorangehenden Proposition, so gilt

$$\langle \chi_\tau, \chi_{\text{Res}_H^G(\rho)} \rangle = \langle \chi_{\text{Ind}_H^G(\tau)}, \rho \rangle.$$

Beweis : Ist $V = V_1 \oplus V_2$ bzw. $W = W_1 \oplus W_2$, so rechnet man direkt nach, dass $\text{Res}_H^G(\rho) = \text{Res}_H^G(\rho|_{V_1}) \oplus \text{Res}_H^G(\rho|_{V_2})$, und $\text{Ind}_H^G(\tau) = \text{Ind}_H^G(\tau|_{W_1}) \oplus \text{Ind}_H^G(\tau|_{W_2})$ ist. Da das Skalarprodukt additiv in beiden Argumenten ist, genügt es, die Aussage für ρ und τ irreduzibel zu zeigen. Die linke Seite der behaupteten Gleichung ist also die Anzahl der Summanden in $\text{Res}_H^G(\rho)$, die isomorph zu τ sind und damit gleich $\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_H(W, \text{Res}_H^G(\rho))$. Mit demselben Argument ist die rechte Seite gleich $\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_G(\text{Ind}_H^G(\rho), V)$ und diese Dimensionen stimmen nach der Proposition überein. \square

Als Beispiel vergleichen wir Darstellungen von S_n und A_n . Ist $\rho: S_n \rightarrow \text{GL}(V)$ irreduzibel, so ist $\rho|_{A_n}$ irreduzibel oder $\rho|_{A_n}$ zerfällt in zwei irreduzible A_n -Darstellungen $V_1 \oplus V_2$, sodass ein (und damit jedes) Element ungerader Signatur V_1 und V_2 vertauscht. Dies passiert offenbar für Darstellungen ungerader Dimension nicht.

Bevor wir das Problem allgemein weiter analysieren, verschaffen wir uns Beispiele, zunächst für A_4 , dann für S_5 und A_5 .

In A_4 ist die Gruppe der Doppelzweier ein Normalteiler

$$V_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

und $A_4/V_4 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Die Konjugationsklassen von A_4 sind $\{e\}$, $V_4 \setminus \{e\}$ sowie die Mengen $\{(123), (142), (134), (243)\}$ und $\{(132), (142), (143), (234)\}$. Drei eindimensionale Darstellungen χ_1, χ_2, χ_3 erhalten wir als Darstellungen von $\mathbb{Z}/3$, also ist nach den

Orthogonalitätsrelationen die Charaktertafel von A_4 gleich

A_4	$\overset{1}{e}$	$\overset{4}{(123)}$	$\overset{4}{(132)}$	$\overset{3}{(12)(34)}$
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	w	w^2	1
χ_3	1	w^2	w	1
χ_4	3	0	0	-1.

wobei $w = e^{2\pi i/3}$ eine primitive dritte Einheitswurzel ist.

Für S_5 sieht man leicht 4 Darstellungen: die triviale Darstellung ρ_1 , die Signum-Darstellung ρ_2 . Das Komplement ρ_3 der trivialen Darstellung in der natürlichen Darstellung sowie $\rho_4 = \rho_3 \otimes \rho_2$. Deren Charaktere bestimmt man leicht wie in der folgenden Tabelle und daraus folgt auch, dass ρ_3 und ρ_4 irreduzibel sind. (Wir schreiben jeweils χ_i für χ_{ρ_i} .)

S_5	$\overset{1}{1}$	$\overset{10}{(12)}$	$\overset{20}{(123)}$	$\overset{30}{(1234)}$	$\overset{24}{(12345)}$	$\overset{15}{(12)(34)}$	$\overset{20}{(12)(345)}$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1	1	1	-1
χ_3	4	2	1	0	-1	0	-1
χ_4	4	-2	1	0	-1	0	1
χ_5	6	0	0	0	1	-2	0
χ_6	5	1	-1	-1	0	1	1
χ_7	5	-1	-1	1	0	1	-1

Sei V_i der Vektorraum, der der Darstellung ρ_i zugrundeliegt. Dann ist $V_3 \otimes V_3 = \Lambda^2(V_3) \oplus \text{Sym}^2(V_3)$. Wie in (...) folgt aus dem Diagonalisierungsargument, den Basen (...) von $\text{Sym}^2(V_3)$ bzw. $\Lambda^2(V_3)$ und der Identität

$$\sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j = \frac{(\sum \lambda_i)^2 - \sum \lambda_i^2}{2}$$

die Formel

$$\chi_{\Lambda^2(V_3)}(g) = \frac{1}{2} (\chi_3(g)^2 - \chi_3(g^2))$$

und die Werte von $\chi_{\Lambda^2(V_3)}$ sind als χ_5 eingetragen, denn sie korrespondieren zu einer irreduziblen Darstellung. Aus

$$120 = 1^2 + 1^2 + 4^2 + 4^2 + 6^2 + \chi_6(e)^2 + \chi_7^2(e)$$

folgt, dass noch zwei fünfdimensionale Darstellungen verbleiben. Aus den Orthogonalitätsrelationen angewandt auf die zweite Spalte folgt $\chi_6((12))^2 + \chi_7((12))^2 = 2$, also sind beide gleich ± 1 , also $\rho_7 = \rho_6 \otimes \rho_2$ und damit kann man die Tabelle komplettieren.

Die A_5 hat 5 Konjugationsklassen, wie in der Charakertafel angegeben. Die Darstellungen $\tau_1 = \text{Res}_{A_5}^{S_5}(\rho_1)$ und $\tau_2 = \text{Res}_{A_5}^{S_5}(\rho_6)$ sind nach obigem Argument irreduzibel.

A_5	¹ 1	²⁰ (123)	¹⁵ (12)(34)	¹² (12345)	¹² (21345)
χ_{τ_1}	1	1	1	1	1
χ_{τ_2}	5	-1	1	0	0
χ_{τ_3}	4	1	0	-1	-1
χ_{τ_4}	3	0	-1	γ	γ^σ
χ_{τ_5}	3	0	-1	γ^σ	γ

Würde $\rho_3|_{A_5}$ in zwei Faktoren aufspalten, so könnten wir eine Basis von V_5 wählen, in der $\rho_3((12))$ aus einer Block-Nebendiagonalmatrix besteht. Da aber $\chi_3((12)) \neq 0$ ist, muss $\tau_3 = \rho_3|_{A_5}$ irreduzibel sein. (Man könnte dies auch anhand von $\langle \tau_3, \tau_3 \rangle_{A_5} = 1$ sehen.) Da ρ_5 auf ungeraden Elementen Spur Null hat, könnte $\tau_6 = \rho_5|_{A_5}$ spalten- und muss dies wegen $\langle \tau_6, \tau_6 \rangle = 2$ auch. Also ist $\tau_6 = \tau_4 \oplus \tau_5$ und der Rest der Charakertafel folgt aus dieser Summendarstellung und den Orthogonalitätsrelationen. (Hier ist $\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\gamma^\sigma = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$).

In den Charakertafeln der S_n für $n \leq 5$ fällt auch auf, dass die Einträge (a priori in \mathbb{C}) stets ganze Zahlen sind, während bei den A_n in der Tat irrationale Einträge in den Charakertafeln stehen. Der Beweis dieser Ganzzahligkeit der Charaktere für S_n für beliebiges n ist das nächste Ziel.

5 Young-Diagramme

Die Konjugationsklassen von S_n entsprechen bijektiv den Partitionen von n . Wir beginnen mit verschiedenen Notationen für Partitionen. Als nächstes Hilfsmittel führen wir den Gruppenring ein, um damit dann alle irreduziblen Charaktere von S_n zu bestimmen.

5.1 Partitionen

Eine *Partition* von n ist eine Zerlegung von n als Summe natürlicher Zahlen $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = n$, die zudem absteigend geordnet ist (d.h. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 0$). Wir schreiben auch λ für solch eine Partition und $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$ für die *Mächtigkeit* der Partition. Ist n die Mächtigkeit von λ , so schreibt man auch $\lambda \vdash n$. Es ist manchmal günstig Nullen unter den λ_i zuzulassen. Ist k der größte Index mit $\lambda_k > 0$, so wird k die Länge der Partition genannt. Partitionen symbolisiert man oft durch Young-Diagramme, einer Anordnung von Boxen. Das Young-Diagramm zu $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ enthält λ_1 Boxen in der ersten Zeile, λ_2 Boxen in der zweiten usw., alle linksbündig angeordnet.

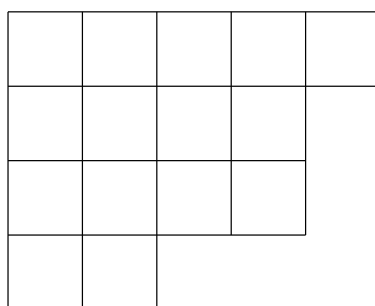


Abbildung 1: Young-Diagramm zu $\lambda = (5, 4, 4, 2)$.

Alternativ kann man eine Partition auch durch Multiplikation beschreiben. Sei r_k die Anzahl der Indices i mit $\lambda_i = k$. Ist $\lambda \vdash n$, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} k r_k = n$ und man schreibt auch $\lambda = 1^{r_1} 2^{r_2} 3^{r_3} \dots$

Man beachte, dass eine Partition einer Menge M (zum Beispiel $M = \{1, \dots, n\}$) definiert ist als eine Menge von disjunkten Teilmengen $M_i \subseteq M$ mit $\bigcup M_i = M$. Zu einer Partition von $\{1, \dots, n\}$ kann man in natürlicher Weise eine Partition von n zuordnen. Es gilt für $B_n = \#\{\text{Partitionen von } \{1, \dots, n\}\}$

$$B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 5, B_4 = 15, B_5 = 52, B_6 = 203, \dots$$

und für $p(n) = \#\{\text{Partition von } n\}$

$$p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 3, p(4) = 5, p(5) = 7, p(6) = 11, \dots$$

Ist λ ein Young-Diagramm, so bezeichnet λ' das an der Antidiagonale $y = -x$ gespiegelte Young-Diagramm. Man nennt λ' die zu λ konjugierte Partition.

Ein *Tableau* (der Ordnung n) ist ein Young-Diagramm, dessen Boxen mit $\{1, \dots, n\}$ durchnummeriert sind. Im Moment wird die durch ein Tableau gegebene Nummerierung eine bequeme (aber inessentielle) Möglichkeit geben, Darstellungen von S_n zu konstruieren: Der Wechsel der Nummerierung führt zu einer isomorphen Darstellung. Wir werden aber (vielleicht?) noch auf Zählprobleme zurückkommen, bei denen die Aufgabe darin besteht alle Tableaus (mit evtl. weiteren Restriktionen) zu zählen.

5.2 Der Gruppenring

Sei G eine endliche Gruppe und $V = \bigoplus_{g \in G} \mathbb{C} \cdot [g]$ der Vektorraum, der der regulären Darstellung zugrunde liegt. Diese definiert einen Homomorphismus $\rho_{\text{reg}}: G \rightarrow \text{GL}(V)$. Damit machen wir V zu einem (nicht-kommutativen) Ring, indem wir $[g] \cdot [h] = [gh]$ definieren und dies \mathbb{C} -linear fortsetzen. In der Tat ist V damit zu einer \mathbb{C} -Algebra geworden, die man als den *Gruppenring* $\mathbb{C}[G]$ (oder die *Gruppenalgebra*) bezeichnet. Wir drücken die bekannte Zerlegung der regulären Darstellung

$$V = \bigoplus_{i=1}^{\#\mathcal{C}(G)} V_i^{\dim(V_i)}$$

als Summe der irreduziblen Darstellungen in dieser Sprache aus.

Proposition 5.1 *Obige Summenzerlegung induziert einen Isomorphismus von \mathbb{C} -Algebren*

$$\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_{i=1}^{\#\mathcal{C}(G)} \text{End}(V_i)$$

Beweis : Nicht nur ρ_{reg} sondern jede Darstellung $\rho_i: G \rightarrow \text{GL}(V_i)$ kann man durch \mathbb{C} -lineare Fortsetzung zu einem \mathbb{C} -Algebren-Homomorphismus $\mathbb{C}[G] \rightarrow \text{End}(V_i)$ ausdehnen. Es ist $\mathbb{C}[G] \rightarrow \text{End}(V)$ per Konstruktion injektiv und das Bild liegt im Unterarm der G -linearen Endomorphismen. Dieser ist $\bigoplus_{i=1}^{\#\mathcal{C}(G)} \text{End}(V_i)$ nach Schurs Lemma.

Da $\dim_{\mathbb{C}} \text{End}(V_i) = \dim_{\mathbb{C}} V_i^2$ ist die Abbildung $\mathbb{C}[G] \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{\#\mathcal{C}(G)} \text{End}(V_i)$ auch surjektiv. □

5.3 Die Frobenius-Charakterformel

Der Begriff des Tableaus ist durch folgende Konstruktion motiviert. Sei T ein Tableau, das dem Young-Diagramm $\lambda \vdash n$ zugrunde liegt. Sei $P = P_T \subseteq S_n$ die Untergruppe, die die Zeilen des Tableaus bewahrt und $Q = Q_T \subseteq S_n$ die Untergruppe, welche die Spalten des Tableaus bewahrt. Damit definieren wir

$$a_T = \sum_{g \in P} [g] \quad \text{und} \quad b_T = \sum_{g \in Q} \text{sgn}(g) \cdot [g].$$

Um die Definition a_T zu erläutern, sei $\rho_{\text{nat}}: S_n \rightarrow \text{GL}(V^{\otimes n})$ die Permutationsdarstellung, wobei V ein beliebiger Vektorraum ist. Dazu gehört der Algebrenhomomorphismus $\mathbb{C}[S_n] \rightarrow \text{End}(V^{\otimes n})$ und das Bild von a_T ist ein Endomorphismus, welcher

$$\text{Sym}^{\lambda_1}(V) \otimes \text{Sym}^{\lambda_2}(V) \otimes \dots \otimes \text{Sym}^{\lambda_k}(V)$$

zum Bild hat. Ebenso ist das Bild von b_T ein Endomorphismus, der

$$\Lambda^{\lambda'_1}(V) \otimes \Lambda^{\lambda'_2}(V) \otimes \dots \otimes \Lambda^{\lambda'_\ell}(V)$$

zum Bild hat, wobei $\lambda' = (\lambda'_1 \geq \lambda'_2 \geq \dots \geq \lambda'_\ell)$ die zu λ konjugierte Partition ist.

Das Element $c_T := a_T \cdot b_T \in \mathbb{C}[G]$ heißt *Young-Symmetrisierer* zum Tableau T . Erstes Ziel ist folgende Aussage, dass alle irreduziblen Darstellungen als Bilder von Young-Symmetrisierern auftreten.

Satz 5.2 *Es gibt ein n_λ , sodass $c_T^2 = n_\lambda c_T$ für jedes Tableau, das λ zugrunde liegt. Das Bild von c_T unter Rechtsmultiplikation*

$$\mathbb{C}[S_n] \rightarrow \mathbb{C}[S_n]; v \mapsto v \cdot c_T$$

ist eine irreduzible S_n -Darstellung V_λ . Jede irreduzible Darstellung von S_n erhält man auf diese Weise.

Wir betrachten einige Spezialfälle als Beispiel. Ist $\lambda = (n)$ ein Diagramm, bestehend aus nur einer Zeile, so ist

$$V_\lambda = \mathbb{C}[S_n] \cdot \sum_{g \in S_n} [g] = \mathbb{C} \cdot \sum_{g \in S_n} [g]$$

die triviale Darstellung. Falls $\lambda = (1, 1, \dots, 1)$, so ist

$$V_\lambda = \mathbb{C}[S_n] \cdot \sum_{g \in S_n} \text{sgn}(g)[g] = \mathbb{C} \cdot \sum_{g \in S_n} \text{sgn}(g)[g]$$

die Signum-Darstellung.

Für $n = 3$ und $\lambda = (2, 1)$ ist der Young-Symmetrisierer zum Standardtableau gleich

$$c_T = \left([\text{id}] + [(12)] \right) \left([\text{id}] - [(13)] \right) = [\text{id}] + [(12)] - [(13)] - [(132)]$$

Da $(12) \cdot c_T = c_T$ und S_3 durch (13) und (12) erzeugt ist, hat $\mathbb{C}[S_n] \cdot c_T$ die Dimension zwei, es ist die fehlende irreduzible Darstellung von S_3 .

Man beachte, dass der Satz via Young-Symmetrisieren eine kanonische Zuordnung von Partitionen (d.h. Konjugationsklassen) zu Darstellungen liefert.

Zum Beweis des Satzes 5.2 beginnen wir mit einigen Vorbereitung. Zunächst ist (für fixiertes T) $P \cap Q = \{\text{id}\}$. Also hat jedes $g \in S_n$ höchstens eine Schreibweise $g = p \cdot q$ mit $p \in P$ und $q \in Q$. Insbesondere ist $c_T = \sum_{g \in I} \pm [g]$ für eine Indexmenge $I \subseteq S_n$. Es gilt nach Definition für $p \in P$ und $q \in Q$ offenbar

$$p \cdot a_T = a_T \cdot p = a_T \quad \text{und} \quad \text{sgn}(q) \cdot q \cdot b_T = b_T \cdot (\text{sgn}(q) \cdot q) = b_T.$$

Lemma 5.3 *Es gilt $p \cdot c_T \cdot \text{sgn}(q) \cdot q = c_T$ für alle $p \in P$ und $q \in Q$ und c_T ist das einzige Element in $\mathbb{C}[S_n]$ mit dieser Eigenschaft, bis auf skalare Vielfache.*

Beweis : Die erste Aussage kombiniert die beiden vorangehenden Bemerkungen. Sei $\sum_{g \in S_n} n_g [g] \in \mathbb{C}[S_n]$ ein weiteres Element mit dieser Eigenschaft. Dann ist $n_{\text{pgq}} = \text{sgn}(q) \cdot n_g$, also insbesondere $n_{\text{pq}} = \text{sgn}(q) \cdot n_1$. Dies ist proportional zu c_T , also ist nur noch zu zeigen, dass für $g \notin P \cdot Q$ der Koeffizient $n_{\text{pq}} = 0$ ist. Angenommen wir finden eine Transposition $t \in S_n$, sodass $t \in P$ und $q = g^{-1}tg \in Q$. Dann ist $g = tqg$ und $n_g = -n_{tg}$, also $n_g = 0$. Sei $T' = gT$. Wir müssen also ein paar von Indices finden, die in der selben Zeile von T und der selben Spalte von T' auftauchen. Mit anderen Worten, wir müssen zeigen, dass falls es diese Indices nicht gibt, so lässt sich $g = pq$ als Produkt von $p \in P$ und $q \in Q$ schreiben. Die Indices der ersten Zeile von T tauchen also allesamt in verschiedenen Spalten von T' auf. Es gibt also $p_1 \in P_T$ und $q'_1 \in Q_{T'} = gQg^{-1}$, sodass p_1T und q'_1T' die erste Zeile haben. Dabei genügt es, wenn p_1 die gleiche erste Zeile von T modifiziert. Die verbleibenden Tableaus p_1T und q'_1T' eingeschränkt auf die zweite bis letzte Zeile, hat also immer noch die Eigenschaft, dass es kein Indexpaar gibt, das in gleicher Zeile (außer Zeile eins) von p_1T und q'_1T' vorkommt. Induktiv können wir also $p \in P$ und $q' \in Q'_T = gQg^{-1}$ finden, sodass $pT = q'T' = q'gT$ ist. Also ist $g = pq^{-1}$, was zu zeigen war. \square

Auf der Menge der Partitionen führen wir folgende (lexikographische) partielle Ordnung ein. Es sei $\lambda > \mu$, falls für den kleinsten Index ℓ mit $\lambda_\ell - \mu_\ell \neq 0$ gilt $\lambda_\ell > \mu_\ell$.

Lemma 5.4 *Ist $\lambda > \mu$ und T_λ bzw. T_μ Tableaus zu λ und μ , so ist für alle $x \in \mathbb{C}[S_n]$ das Produkt $a_{T_\lambda} \cdot x \cdot b_{T_\mu} = 0$. Insbesondere ist unter dieser Voraussetzung $c_\lambda \cdot c_\mu = 0$.*

Beweis : Die zweite Aussage folgt aus der ersten durch Anwenden auf $x = b_{T_\lambda} \cdot a_{T_\mu}$. Die erste Aussage können wir auf Erzeugern $g \in S_n \subseteq \mathbb{C}[S_n]$ nachprüfen. Da $gb_{T_\mu}g^{-1}$ das „Spalten“-Element zum Tableau gT_μ ist und wir die Aussage sowieso für ein beliebiges Tableau zu μ zeigen wollen, genügt es $a_{T_\lambda} \cdot b_{T_\mu} = 0$ für alle T_λ und alle T_μ nachzuprüfen. Wir behaupten, dass die Voraussetzung $\lambda > \mu$ impliziert, dass es ein Indexpaar (i, j) gibt, das in der gleichen Zeile von T und der gleichen Spalte von T' auftritt. Mit Hilfe dieser Behauptung sei $t = (ij)$ die zugehörige Transposition. Dann ist

$$a_{T_\lambda} \cdot b_{T_\mu} = a_{T_\lambda} t \cdot t b_{T_\mu} = a_{T_\lambda} \cdot (-1) \cdot b_{T_\mu},$$

also $a_{T_\lambda} \cdot b_{T_\mu} = 0$. Die Behauptung verifiziert man induktiv: Ist $\lambda_1 = \mu_1$, so ist sie offensichtlich. Ist $\lambda_1 > \mu_1$ und das gewünschte Indexpaar tritt nicht in der ersten Zeile auf, so gibt es $p_1 \in P_{T_\lambda}$ und $q_1 \in Q_{T_\mu}$, sodass die ersten Zeilen von $p_1 P_{T_\lambda}$ und $q_1 Q_{T_\mu}$ übereinstimmen. Man kann nun die Induktionsvoraussetzung auf die Tableaus ohne die erste Zeile anwenden. \square

Lemma 5.5 *Für jedes $x \in \mathbb{C}[S_n]$ ist $c_T \cdot x \cdot c_T$ ein skalares Vielfaches von c_T . Für $x = 1$ hängt der Skalar nicht von T ab.*

Beweis : Das Element $c_T \cdot x \cdot c_T$ erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 5.3 und daraus folgt die erste Behauptung. Ist $T' = gT$, so ist $b_{T'} = gb_Tg^{-1}$ und $a_{T'} = ga_Tg^{-1}$ und daraus folgt die zweite Behauptung. \square

Beweis von Satz 5.2 : Wir zeigen zunächst, dass V_T irreduzibel ist. Nach dem vorigen Lemma ist $c_T V_T \subseteq \mathbb{C} \cdot c_T$. Ist also $W \subseteq V_T$ ein S_n -invarianter Unterraum, so ist $c_T \cdot W = \mathbb{C} \cdot c_T$ oder $c_T \cdot W = 0$. Im ersten Fall ist $V_T = \mathbb{C}[S_n] \cdot c_T \subseteq W$, also $V_T = W$. Im zweiten Fall ist $W \cdot W \subseteq V_T \cdot W = \mathbb{C}[S_n] \cdot c_T \cdot W = 0$. Wir zeigen, dass dies $W = 0$ impliziert. Sei dazu U ein S_n -invariantes Komplement von W in $\mathbb{C}[S_n]$. D.h. $\mathbb{C}[S_n] = W \oplus U$ als $\mathbb{C}[S_n]$ -Moduln. Wir können $1 \in \mathbb{C}[S_n]$ schreiben als $1 = w + u$, $w \in W, u \in U$. Multiplikation mit w liefert $w = w^2 + w \cdot u = wu$. Wegen $w \in W$ und $wu \in U$ ist also $w \cdot u = w = 0$ und damit $1 \in U$. Aus $\mathbb{C}[S_n] = \mathbb{C}[S_n] \cdot 1 \subseteq U$ folgt dann $W = 0$.

Als nächstes zeigen wir, dass für $\lambda > \mu$ und zugehörigen Tableaux T bzw. T' die Darstellungen V_T und $V_{T'}$ nicht isomorph sind. Es ist $c_T \cdot V_T = \mathbb{C} \cdot c_T \neq 0$, aber $c_T \cdot V_{T'} = c_T \cdot \mathbb{C}[S_n] \cdot c_{T'} = 0$, also sind die beiden $\mathbb{C}[S_n]$ -Moduln V_T und $V_{T'}$ nicht isomorph und damit sind auch die Darstellungen nicht isomorph. \square

Als Schlussbemerkung halten wir noch fest, dass

$$n_\lambda = n! / \dim(V_T)$$

gilt. Zum Beweis davon betrachten wir die Abbildung $F: x \mapsto x \cdot c_T$ als Endomorphismus von $\mathbb{C}[S_n]$. Auf V_T ist dies Multiplikation mit n_λ per Definition, auf $\text{Ker}(c_T)$ ist es die Nullabbildung. Also ist

$$n_\lambda \cdot \dim(V_T) = \text{Spur}(F) = |S_n| \cdot (\text{Koeff. von [id] in } c_T) = |S_n|.$$

Damit kennen wir zwar alle Darstellungen von S_n , aber um die Charaktertafel zu erstellen (und damit eine gegebene Darstellung als Summe von irreduziblen Darstellungen zerlegen zu können), ist das ein ziemlich kompliziertes Verfahren. Das nächste Ziel ist eine Formel um die Charaktertafel effizient zu berechnen - ohne die Darstellungen selbst auszurechnen. Die Formel basiert auf Manipulation von Polynomen in k Variablen X_1, \dots, X_k , wobei k mindestens die Länge der Partition λ ist, zu der man gerade χ_λ berechnen will. Mehr Variablen zu nehmen, macht das Ausrechnen aufwendiger. Für theoretische Resultate ist es oft wichtig, dass das Resultat davon unabhängig ist. Wir schreiben X für X_1, \dots, X_k . Zunächst erinnern wir an die Vandermonde-Determinante bzw. an die *Diskriminante*

$$\Delta(X) = \begin{vmatrix} 1 & X_k & \dots & X_k^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_1 & \dots & X_1^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (X_i - X_j) = \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) X_k^{\sigma(1)-1} \cdot \dots \cdot X_1^{\sigma(k)-1}$$

Wir definieren das *Potenzsummenpolynom*

$$P_j(X) = \sum_{i=1}^k X_i^j.$$

und führen folgende Schreibweise zur Koeffizientenextraktion eines Polynoms ein. Ist $\underline{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_k)$ ein k -Tupel ganzer Zahlen, so sei $[X^{\underline{\ell}}]P$ oder $[(\ell_1, \dots, \ell_k)]P$ der Koeffizient von $X_1^{\ell_1} X_2^{\ell_2} \dots X_k^{\ell_k}$ im Polynom P . Wir hatten bereits zwei Koordinatensysteme für eine Partition $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots) = 1^{r_1} 2^{r_2} 3^{r_3} \dots$ eingeführt und nehmen nun noch die verschobenen Koordinaten $y_i = \lambda_i - i$ hinzu. Eine Partition wird also durch eine strikt fallende Folge ganzer Zahlen y_i mit $y_i \geq -i$ und $y_i = -i$ für $i \geq \ell(\lambda)$ beschrieben. Damit können wir nun die Frobenius-Formel angeben.

Satz 5.6 Der Charakter χ_λ der Darstellung V_λ auf der Konjugationsklasse von $\mu = 1^{r_1} 2^{r_2} 3^{r_3} \dots$ ist

$$\chi_\lambda(C_\mu) = [X^{\underline{\ell}}] \left(\Delta(X) \cdot \prod_{j \geq 0} P_j^{r_j} \right),$$

wobei X aus mindestens $\ell(\lambda)$ Unbestimmten besteht.

$\underline{\ell}$ bezeichnet hier die verschobenen Koordinaten zu denen noch die Anzahl der unbestimmten von X addiert werden, also $\ell_i = \lambda_i - i + k$.

Beispielsweise ist für $n = 5$ und $\lambda = (4, 1)$ sowie $C_\mu = \langle (12)(345) \rangle$, also $r_1 = 0, r_2 = 1, r_3 = 1$ der Wert des Charakters

$$\chi_{(4,1)}(C_\mu) = [X_1^5 X_2^1] [(X_1 - X_2)(X_1^2 + X_2^2)^1 (X_1^3 + X_2^3)^1] = -1.$$

Um zu sehen, welche Darstellung $\chi_{(4,1)}$ ist, nehmen wir die Frobeniusformel als bewiesen an und leiten daraus eine Dimensionsformel ab. Gesucht ist die Auswertung auf der Konjugationsklasse der Identität, als $r_1 = n$ und $r_i = 0$ für $i \geq 2$. Es ist für $\ell(\lambda) = k$

$$\dim V_\lambda = [X^{\underline{\ell}}] (\Delta(X) \cdot (X_1 + \dots + X_k)^n)$$

und wegen

$$(X_1 + \dots + X_k)^n = \sum_{\sum s_i = n} \frac{n!}{s_1! s_2! \dots s_k!} X_1^{s_1} X_2^{s_2} \dots X_k^{s_k}$$

ist

$$\dim V_\lambda = \sum \operatorname{sgn}(\sigma) \frac{n!}{(\ell_1 - \sigma(k) + 1)! \dots (\ell_k - \sigma(1) + 1)!},$$

wobei die Summe über alle $\sigma \in S_k$ läuft, für die $\ell_{k-i+1} - \sigma(i) + 1 \geq 0$ für alle $1 \leq i \leq k$ ist. Diese Formel kann man vereinfachen zu

$$\begin{aligned} \dim V_\lambda &= \frac{n!}{\ell_1! \dots \ell_k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^k \left(\ell_j (\ell_j - 1) \dots (\ell_j - \sigma(k - j + 1) + 2) \right) \\ &= \frac{n!}{\ell_1! \dots \ell_k!} \begin{vmatrix} 1 & \ell_k & \ell_k(\ell_k - 1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \ell_1 & \ell_1(\ell_1 - 1) & \dots \end{vmatrix} \\ &= \frac{n!}{\ell_1! \dots \ell_k!} \begin{vmatrix} 1 & \ell_k & \ell_k^2 & \dots & \ell_k^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \ell_1 & \ell_1^2 & \dots & \ell_1^{k-1} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

also

$$\dim V_\lambda = \frac{n!}{\ell_1! \cdot \dots \cdot \ell_k!} \prod_{i < j} (\ell_i - \ell_j),$$

wobei immer noch $\ell_i = \lambda_i + k - i$ ist.

Im konkreten Beispiel ist $V_{(4,1)}$ eine 4-dimensionale Darstellung, wegen $\chi_{(4,1)}(\mathcal{C}_\mu) = -1$ also die mit χ_3 in der Charaktertafel bezeichnete.

Zur Vorbereitung des Beweises der Frobenius-Formel schreiben wir T_λ für das natürliche Tableau zur Partition λ , bestehend aus $1, \dots, \lambda_1$ in der ersten Zeile, $\lambda_1 + 1, \dots, \lambda_1 + \lambda_2$ in der zweiten usw. Mit U_{T_λ} oder kurz U_λ bezeichnen wir die S_n -Darstellung auf $U_\lambda = \mathbb{C}[S_n] \cdot a_{T_\lambda}$. Da a_{T_λ} unter P_{T_λ} invariant ist, können wir $U_\lambda = \text{Ind}_{P_{T_\lambda}}^{S_n}(\tau_1)$ als von der eindimensionalen trivialen Darstellung von P_{T_λ} induziert auffassen.

Die Abbildung $x \mapsto x \cdot b_T$ induziert eine Abbildung $U_\lambda = \mathbb{C}[S_n] \cdot a_T \rightarrow V_\lambda = \mathbb{C}[S_n] \cdot a_T \cdot b_T$, welche offenbar surjektiv ist. Das S_n -invariante Komplement zum Kern dieser Surjektion ist eine zu V_λ isomorphe Unterdarstellung von U_λ . Der Beweisplan besteht also darin, eine Koeffizientenextraktionsformel für den Charakter von U_λ zu finden, die anderen Darstellungen in U_λ sowie die Vielfachheit von V_λ in U_λ zu identifizieren und dann induktiv den Charakter von V_λ herauszudestillieren.

Proposition 5.7 *Der Charakter Ψ_λ der Darstellung U_λ kann durch*

$$\Psi_\lambda(\mathcal{C}_\mu) = [X^\lambda] \left(\prod_{j \geq 0} P_j^{r_j} \right)$$

berechnet werden.

Beweis : Zunächst ist

$$|\mathcal{C}_\mu| = \frac{n!}{1^{r_1} \cdot r_1! \cdot 2^{r_2} \cdot r_2! \cdot \dots \cdot n^{r_n} \cdot r_n!},$$

was man wie folgt zeigt. Man erhält ein Element von \mathcal{C}_μ , indem man in ein fixiertes Zyklenschema der Reihe nach eine Permutation von $\{1, \dots, n\}$ schreibt. Dies zählt aber Zykel zu oft und zwar die zyklische Vertauschung in jedem Zykel, also $1^{r_1} \cdot 2^{r_2} \cdot 3^{r_3} \cdot \dots$, sowie die Vertauschung der i -Zykel für $1 \leq i \leq n$ muss noch herausdividiert werden.

Wir zerlegen nun $\mathcal{C}_\mu \cap P_{T_\lambda}$ in P_{T_λ} -Konjugationsklassen D_1, \dots, D_S .

Für den Charakter einer Darstellung, die von der trivialen Darstellung induziert ist, gilt (für $g \in \mathcal{C}_\mu$ fixiert)

$$\Psi_\lambda(\mathcal{C}_\mu) := \chi_{\text{Ind}_{P_T}^{S_n}(tr)}(\mathcal{C}_\mu) = \sum_{g\sigma=g} 1,$$

wobei σ die Nebenklassen G/H durchläuft. Wir schreiben dies um zu

$$\begin{aligned} \Psi_\lambda(\mathcal{C}_\mu) &= \frac{1}{|H|} \frac{1}{|\mathcal{C}_\mu|} \sum_{\substack{g \in \mathcal{C}_\mu, s \in G \\ gs \in sH}} 1 = \frac{1}{|H|} \frac{1}{|\mathcal{C}_\mu|} \sum_{\substack{s \in G, g \in \mathcal{C}_\mu \\ s^{-1}gs \in H}} 1 \\ &= \frac{1}{|H|} \frac{1}{|\mathcal{C}_\mu|} \sum_{s \in G, g \in \mathcal{C}_\mu \cap H} 1 = \frac{|G|}{|H|} \cdot \frac{|\mathcal{C}_\mu \cap H|}{|\mathcal{C}_\mu|} \\ &= \frac{1^{r_1} r_1! 2^{r_2} r_2! \dots n^{r_n} r_n!}{n!} \cdot \frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_k!} \cdot \sum_{p=1}^k \prod_{1^{S_{p,1}} S_{p,1}! \dots n^{S_{p,n}} S_{p,n}!} \frac{\lambda_p!}{1^{S_{p,1}} S_{p,1}! \dots n^{S_{p,n}} S_{p,n}!} \end{aligned}$$

wobei die Summe über alle $s_{p,q}$ läuft, sodass

$$r_q = \sum_{p=1}^k s_{p,q} \quad \text{und} \quad \lambda_p = \sum_{q=1}^n q \cdot s_{p,q},$$

d.h. $1^{S_{p,1}} \cdot 2^{S_{p,2}} \cdot \dots$ ist eine Partition von λ_p für alle p und die Teile dieser Partition summieren sich (über q) zur Partition $\mu = 1^{r_1} 2^{r_2} 3^{r_3} \cdot \dots$ auf. Die $k^{S_{p,k}}$ -Ausdrücke kürzen sich gegen die k^{r_k} -Ausdrücke, sodass nach Vereinfachen und Umsortieren des inneren Produkts

$$\Psi_\lambda(\mathcal{C}_\mu) = \sum \prod_{q=1}^d \frac{r_p!}{s_{1,q}! s_{2,q}! \cdot \dots \cdot s_{k,q}!}$$

ergibt, wobei die Summe immer noch über die gleichen $S_{p,q}$ läuft. Dieser Term ist genau der Koeffizient von $x^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x^{\lambda_k}$ im Polynom

$$(X_1 + \dots + X_k)^{\ell_1} \cdot (X_1^2 + \dots + X_k^2)^{\ell_2} \cdot \dots \cdot (X_1^n + \dots + X_k^n)^{\ell_n},$$

und das beweist die Aussage. □

Zum Beweis der Frobenius-Formel müssen wir also $[x^\lambda](P)$ und $[x^\ell](\Delta \cdot P)$ zum einen und U_λ und V_λ zum anderen miteinander vergleichen.

5.4 Symmetrische Polynome

Ein Polynom P in k Variablen heißt *symmetrisch*, falls es unter der natürlichen Permutationsoperation von S_k auf den Variablen x_1, \dots, x_k invariant ist.

Der \mathbb{Z} -Modul aller symmetrischen Polynome in $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_k]$ hat mehrere nützliche Basen und in diesem Abschnitt betrachten wir die Umrechnungsmatrixen zwischen diesen Basen.

In der Algebra haben wir das j -te *elementarsymmetrische Polynom*

$$E_j = \sum_{i_1 < \dots < i_j} X_{i_1} \cdot \dots \cdot X_{i_j}$$

kennengelernt. Wir weiten die Definition auf Partitionen λ aus, indem wir

$$E_\lambda = E_{\lambda_1} \cdot \dots \cdot E_{\lambda_{\ell(\lambda)}}$$

setzen. Des weiteren gibt es die *vollständig symmetrischen Polynome* H_j , die aus allen Monomen vom Gesamtgrad j (mit Koeffizienten 1) bestehen. Wieder erlauben wir die Indizierung mit Partitionen

$$H_\lambda = H_{\lambda_1} \cdot \dots \cdot H_{\lambda_{\ell(\lambda)}}.$$

Die wichtigsten Polynome in der Darstellungstheorie sind die Schurpolynome

$$S_\lambda = \frac{\det \left(X_i^{\lambda_j + k - j} \right)_{i,j}}{\det \left(X_i^{k-j} \right)_{i,j}} = \frac{\det \left(X_i^{\lambda_j + k - j} \right)_{i,j}}{\Delta}.$$

Beispielsweise ist für $k = 3$

$$\begin{aligned} E_{(1,1)} &= (X_1 + X_2 + X_3)^2 = H_{(1,1)} \\ S_{(1,1)} &= X_1 X_2 + X_1 X_3 + X_2 X_3 = E_{(2,0)} \\ S_{(2,0)} &= X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_1 X_2 + X_1 X_3 + X_2 X_3 = H_{(2,0)}. \end{aligned}$$

Aus der Definition ist nicht einmal sofort offensichtlich, dass die Schur-Polynome wirklich Polynome und nicht nur eine rationale Funktion ist. Diese Eigenschaft folgt zum Beispiel aus der folgenden Bezeichnung.

Proposition 5.8 (Jacobi-Trudi-Identität)

$$S_\lambda = \det(H_{\lambda_i + j - i})_{i,j=1}^k.$$

Dabei verwenden wir die Konvention $H_0 = 1$ und $H_k = 0$ für $k < 0$, sodass die Determinante rechts gleich der $\ell(\lambda) \times \ell(\lambda)$ -Unterdeterminante im linken oberen Block ist. Zwischen Schur-Polynom und elementar-symmetrischen Polynomen gilt eine ähnliche Beziehung mit Hilfe der zu λ konjugierten Partition λ' .

Proposition 5.9 (Giambelli-Formel)

$$S_\lambda = \det(E_{\lambda'_i + j - i})_{i,j=1}^k.$$

Beweis der Proposition 5.8 : Die elementarsymmetrischen Polynome und die vollständig symmetrischen Polynome kann man durch erzeugende Funktionen mit einer zusätzlichen Unbestimmten t schreiben als

$$\prod_{i=1}^k (1 + X_i t) = \sum_{j=0}^{\infty} E_j t^j$$

und

$$\prod_{i=1}^k \frac{1}{1 - X_i t} = \sum_{j=0}^{\infty} H_j t^j. \quad (2)$$

Setzt man in die erste Gleichung $-t = X_j^{-1}$, so folgt

$$X_j^p - E_1 X_j^{p-1} + E_2 X_j^{p-2} - \dots + \dots + (-1)^k E_k X_j^{p-k} = 0$$

für jedes $p \geq k$ und $1 \leq j \leq k$.

Multiplikation der beiden erzeugenden Reihen ergibt

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=0}^p (-1)^k E_k H_{p-k} t^p = 1 \quad (3)$$

und damit für $p \geq k > m \geq 0$

$$H_{p-m} - E_1 H_{p-m-1} + E_2 H_{p-m-2} - \dots + \dots + (-1)^k E_k H_{p-m-k} = 0.$$

Die Folgen $(X_j^p)_{p \in \mathbb{N}}$ und $(H_{p-m})_{p \in \mathbb{N}}$ erfüllen also für alle j und m wie oben dieselbe Rekursion. Folglich gibt es universelle Polynome $A(p, q)$, $q = 1, \dots, k$, $p \in \mathbb{N}$ in den Koeffizientenvariablen, d.h. in den E_i , sodass sich der p -te Koeffizient der Reihe aus den Anfangswerten berechnet, also

$$X_j^p = \sum_{q=1}^k A(p, q) X_j^{k-q} \quad H_{p-m} = \sum_{q=1}^k A(p, q) H_{k-m-q}.$$

In der Matrixschreibweise besagen diese Formeln

$$\begin{aligned} (X_j^{\lambda_i+k-i})_{i,j} &= (A(\lambda_i + k - i, q))_{i,q} \cdot (X_j^{k-q})_{q,j} \\ (H_{\lambda_i+j-i})_{i,j} &= (A(\lambda_i + k - i, q))_{i,q} \cdot (H_{j-q})_{q,j} \end{aligned}$$

Außerdem besagt die Definition und die Gleichung (3), dass die Matrizen $(H_{q-p})_{p,q}$ und $(-1)^{q-p} E_{q-p}$ untere Dreiecksmatrizen mit 1 auf der Diagonale und invers zueinander sind. Zusammengenommen geben die Gleichungen

$$(X_j^{\lambda_i+k-i})_{i,j} = (H_{\lambda_i+j-i})_{i,p} \cdot ((-1)^{q-p} E_{q-p})_{p,q} \cdot (X_j^{k-q})_{q,j}$$

und die Determinante hiervon ergibt die Jacobi-Trudi-Identität. □

Der Beweis der Giambelli-Formel verbleibt als Übung. Wir zeigen nun die erste Formel für das Produkt von Schurpolynomen.

Proposition 5.10 (Pieris Formel) Die Multiplikation mit dem Schurpolynom $S_{(m)} = H_m$ mit nur einem Index ist gegeben durch

$$S_\lambda \cdot S_{(m)} = \sum S_\nu,$$

wobei die Summe über alle Young-Diagramme ν läuft, die man aus λ durch Addition von m Kästchen erhält, wobei keine zwei Kästchen in der selben Spalte sind, d.h. ist $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ und $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots)$, so ist $|\lambda| + m = |\nu|$ und

$$\nu_1 \geq \lambda_1 \geq \nu_2 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \nu_k \geq \lambda_k \geq 0.$$

Beispielsweise sind für $\lambda = (2, 1)$ und $m = 2$ die Partitionen $(4, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 1, 1)$ und $(2, 2, 1)$ zulässig. Wir benötigen folgendes Korollar aus dieser Formel.

Korollar 5.11 (Erste Basiswechselformel) Die vollständig symmetrischen Polynome H_λ erhält man aus den Schurpolynomen durch

$$H_\lambda = S_{(\lambda_1)} \cdot S_{(\lambda_2)} \cdot \dots \cdot S_{(\lambda_k)} = \sum_{\mu} K_{\mu\lambda} S_{\mu},$$

wobei μ alle Young-Diagramme mit $|\mu| = |\lambda|$ durchläuft und $K_{\mu\lambda}$ die Anzahl der Arten ist, das Young-Diagramm μ mit λ_1 Einsen, mit λ_2 Zweien, ... und schließlich mit λ_k Ziffern k zu füllen, sodass die Einträge in jeder Zeile (nicht notwendig strikt) wachsen und in jeder Spalte strikt wachsen.

Die Zahlen $K_{\mu\lambda}$ werden *Kostka-Zahlen* genannt. Offenbar ist $K_{\lambda\lambda} = 1$ und $K_{\mu\lambda} = 0$, falls $\lambda > \mu$.

Das Korollar folgt aus Pieris Formel unmittelbar durch Induktion.

Beweis von Pieris Formel : Es genügt für alle (ℓ_1, \dots, ℓ_k) die Identität

$$\det(X_j^{\ell_i}) \cdot \prod_{j=1}^k (1 - X_j)^{-1} = \sum \det(X_j^{m_i})$$

nachzuprüfen, wobei die Summe über alle (m_1, \dots, m_k) läuft mit $m_1 \geq \ell_1 \geq m_2 \geq \ell_2 \geq \dots \geq m_k \geq \ell_k \geq 0$. Denn dann setzt man $X_j \cdot t$ für X_j ein, sortiert nach t -Potenzen und dividiert durch Δ . In der Mitte steht dann $\sum H_j t^j$ und nach Herausziehen der t -Potenzen aus der Determinante steht links $S_{(\ell_i+i-k)} t^{\sum \ell_i}$ und rechts $\sum S_{(m_i+i-k)} t^{\sum m_i}$.

Koeffizientenvergleich der Polynome mit unbestimmter t liefert die Behauptung. Der Beweis der Identität verbleibt als Übung. □

Nächstes Ziel ist eine weitere Basiswechselformel, in der die Basiswechselmatrix wieder durch Kostka-Zahlen gegeben ist.

Als Vorbereitung ein Lemma, in dem wir einen weiteren Satz Variablen Y_1, \dots, Y_k benötigen.

Lemma 5.12 *Produkte von Schurpolynomen sind durch folgende, erzeugende Funktion gegeben:*

$$\sum_{\ell(\lambda) \leq k} S_\lambda(X) S_\lambda(Y) = \prod_{i,j=1}^k \frac{1}{(1 - X_i Y_j)}.$$

Beweis : Wir zeigen zunächst folgende Formel, die auf Cauchy zurückgeht. Es ist

$$\det \left(\frac{1}{1 - X_i Y_j} \right) = \frac{\Delta(X) \Delta(Y)}{\prod_{i,j=1}^k (1 - X_i Y_j)}. \quad (4)$$

Der Beweis davon ist durch Induktion nach k . Unter Verwendung von

$$\frac{1}{1 - X_i Y_j} - \frac{1}{1 - X_1 Y_j} = \frac{X_i - X_1}{1 - X_1 Y_j} \cdot \frac{Y_j}{1 - X_i Y_j}$$

ziehen wir die erste Zeile der Matrix in der Determinante von allen anderen Zeilen ab. Den ersten Bruch auf der rechten Seite können wir aus allen Zeilen und Spalten rausziehen. Nun ziehen wir die erste Spalte der resultierenden Matrix von allen anderen Spalten ab, indem wir für $i > 1$

$$\frac{Y_j}{1 - X_i Y_j} - \frac{Y_1}{1 - X_i Y_1} = \frac{Y_j - Y_1}{1 - X_i Y_j} \cdot \frac{1}{1 - X_i Y_1}$$

verwenden. Nun ist die erste Zeile gleich $(1, 0, \dots, 0)$ und wir ziehen den Nenner $1 - X_i Y_1$ aus jeder Zeile, außer der ersten heraus. Nach Herausziehen von $Y_j - Y_1$ aus allen Spalten, außer der ersten, ist die restliche $(k-1) \times (k-1)$ -Matrix von der ursprünglichen Gestalt. Die herausgezogenen Faktoren sind genau der Unterschied der rechten Seiten für k bzw. $k-1$ Variablen.

Wir entwickeln nun die Determinante der Matrix mit Einträgen

$$(1 - X_i Y_j)^{-1} = 1 + X_i Y_j + X_i^2 Y_j^2 + \dots$$

Der Koeffizient von $Y_1^{\ell_1} Y_2^{\ell_2} \dots Y_k^{\ell_k}$ ist die Determinante von $(X_j^{\ell_i})$ und damit wegen Symmetrie in den Variablenmengen X_i und Y_i ist

$$\det \left(\frac{1}{1 - X_i Y_j} \right)_{i,j} = \sum_{\underline{\ell}} \det(\underline{X}^{\underline{\ell}}) \det(\underline{Y}^{\underline{\ell}}), \quad (5)$$

wobei die Summe alle ℓ mit allen fallenden (oder äquivalent: mit allen strikt fallenden) Einträgen durchläuft.

Die Behauptung folgt nun aus der Kombination von (5), (4) und der Definition der Schurpolynome. \square

Diese formale Identität ist das wesentliche Hilfsmittel zum Beweis der folgenden Interpretation der Kostka-Zahlen als Basiswechselmatrix.

Dafür definieren wir das monosymmetrische Polynom zur Partition λ als $M_\lambda := \sum X^\alpha$, wobei α alle verschiedenen Permutationen von $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ durchläuft.

Proposition 5.13 *Die Schurpolynome und die monosymmetrischen Polynome gehen durch den Basiswechsel*

$$S_\mu = \sum_{\lambda} K_{\mu\lambda} M_\lambda$$

ineinander über.

Beweis : Entwickeln der Formel (2) gibt

$$\frac{1}{\prod_{i,j} (1 - X_i Y_j)} = \prod_j \left(\sum_{m=0}^{\infty} H_m(X) Y_j^m \right) = \sum_{\lambda} H_\lambda(X) M_\lambda(Y).$$

Schreibt man $S_\lambda = \sum a_{\lambda\gamma} H_\gamma$ und $S_\lambda = \sum b_{\gamma\lambda} M_\gamma$ (die Indizierung der $b_{\gamma\lambda}$ ist bewusst transponiert), so ist

$$\frac{1}{\prod_{i,j} (1 - X_i Y_j)} = \sum_{\lambda} S_\lambda(X) S_\lambda(Y) = \sum_{\lambda, \mu, \rho} a_{\lambda\mu} H_\mu(X) b_{\rho\lambda} M_\rho(Y), \quad (6)$$

also ist $\sum_{\lambda} b_{\rho\lambda} a_{\lambda\mu} = \delta_{\rho\mu}$.

Schreiben wir $A = (a_{\mu\lambda})$, $B = (b_{\lambda\mu})$ und $K = (K_{\lambda\mu})$,

so ist

$$S = A \cdot H; \quad H = K^\top \cdot S; \quad S = B^\top \cdot M \quad \text{und} \quad B \cdot A = I,$$

also $B = A^{-1} = K^\top$, woraus die Behauptung folgt. \square

Wir interessieren uns für den Koeffizientenextraktionsoperator

$$w_\lambda(P) = [X^\lambda](\Delta \cdot P),$$

wobei P ein symmetrisches Polynom ist und $\ell_i = \lambda_i + k - i$ wir bisher. Wir vergleichen dies mit der gewöhnlichen Koeffizientenextraktion. Diese erfüllt per Definition für jedes symmetrische P

$$P = \sum_{\lambda} [X^{\ell}](P) \cdot M_{\lambda}.$$

Obige Proposition können wir also als $K_{\mu\lambda} = [X^{\lambda}](S_{\mu})$ reformulieren.

Die $w_{\lambda}(P)$ erfüllen eine ähnliche Beziehung mit den Schurpolynomen, nämlich

$$P = \sum_{\lambda} w_{\lambda}(P) S_{\lambda}.$$

Um diese nachzuweisen, genügt es das auf einer Basis, also für $P = S_{\mu}$ zu prüfen. Sei $m_i = \mu_i + k - i$. Nach Definition ist $\Delta \cdot S_{\mu}$ eine Determinante. In dieser tritt als einziges Monom mit strikt fallenden Exponenten $X^{\underline{m}}$ auf, d.h. $[X^{\underline{m}}](\Delta \cdot S_{\mu}) = 1$ und $[X^{\underline{n}}](\Delta \cdot S_{\mu}) = 0$ für $\underline{n} \neq \underline{m}$ strikt fallend. Daraus folgt die Behauptung.

Daraus erhalten wir, dass die Kostka-Zahlen auch den Übergang zwischen der gewöhnlichen und der w_{λ} -Koeffizientenextraktion vermitteln:

Lemma 5.14 *Für jedes symmetrische Polynom P gilt*

$$[X^{\lambda}]P = \sum_{\mu} K_{\mu\lambda} \cdot w_{\lambda}(P).$$

Beweis : Die induktive Anwendung der Pieri-Formel hat uns bereits $K_{\mu\lambda} = w_{\mu}(H_{\lambda})$ gezeigt.

Nun gilt

$$\sum_{\lambda} [X^{\lambda}](P) M_{\lambda} = P = \sum_{\mu} w_{\mu}(P) S_{\mu} = \sum_{\lambda, \mu} w_{\mu}(P) K_{\mu\lambda} M_{\lambda} = \sum_{\lambda} \left(\sum_{\mu} K_{\mu\lambda} w_{\mu}(P) \right) M_{\lambda}.$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt die Behauptung. □

Ist $\nu = (\nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots) = 1^{r_1} 2^{r_2} 3^{r_3} \cdot \dots$, so schreiben wir $w_{\lambda}(\nu) := w_{\lambda}(\prod_{i \geq 0} P^{r_i})$ für die Anwendung auf das Produkt von Potenzsummenpolynomen, welche uns hauptsächlich interessiert. Diese genügen einer Identität, welche formal wie die Orthogonalitätsrelation aussieht:

Lemma 5.15 *Sind λ und μ Partitionen von n , so ist*

$$\sum \frac{w_{\lambda}(\nu) w_{\mu}(\nu)}{1^{r_1} r_1! 2^{r_2} r_2! \cdot \dots \cdot n^{r_n} r_n!} = \begin{cases} 0 & \text{falls } \mu \neq \lambda \\ 1 & \text{falls } \mu = \lambda \end{cases}$$

Beweis : Es ist

$$\log \left(\prod_{i,j} (1 - X_i Y_j)^{-1} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\sum_{i,j} X_i^k Y_j^k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} P_k(X) P_k(Y).$$

Also ist mit der üblichen Konvention $P^\nu = \prod P^{r_i}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\prod_{i,j} (1 - X_i Y_j)} &= \prod_{k=1}^{\infty} \exp \left(\frac{1}{k} P_k(X) P_k(Y) \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\nu \vdash n} \frac{P^\nu(X) P^\nu(Y)}{1^{r_1} r_1! 2^{r_2} r_2! \cdot \dots \cdot n^{r_n} r_n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\nu \vdash n} \frac{1}{1^{r_1} r_1! 2^{r_2} r_2! \cdot \dots \cdot n^{r_n} r_n!} \sum_{\lambda} w_\lambda(\nu) S_\lambda(X) \cdot \sum_{\mu} w_\mu(\nu) S_\mu(Y). \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich mit (6) liefert die Behauptung. \square

Beweis der Frobenius-Formel: In den nun eingeführten Bezeichnungen ist noch $\chi_\lambda(\mathcal{C}_\nu) = w_\lambda(\nu)$ zu zeigen. Wir schreiben den Charakter Ψ_λ von U_λ als Summe

$$\Psi_\lambda = \sum_{\mu} n_{\lambda\mu} \chi_\mu, \quad (7)$$

wobei wir bereits wissen, dass $n_{\lambda\lambda} \geq 1$ ist und $n_{\lambda\mu} \geq 0$ aufgrund der Halbeinfachheit. Da wir die Formel aus dem vorangehenden Lemma zu

$$\psi_\lambda(\mathcal{C}_\nu) = [X^\lambda](P^\nu) = w_\lambda(\nu) + \sum_{\mu > \lambda} K_{\mu\lambda} w_\mu(\nu) \quad (8)$$

spezialisieren können (denn $K_{\mu\lambda} = 0$, falls $\mu < \lambda$), können wir induktiv $w_\lambda(\nu)$ als Summe von Charakteren

$$w_\lambda = \sum m_{\lambda\mu} \chi_\mu$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $m_{\lambda\mu}$ schreiben. Aufgrund des Lemmas 5.15 wissen wir, dass die w_λ wie auch die χ_λ eine Orthonormalbasis des Vektorraums bilden. Also ist $1 = \langle w_\lambda, w_\lambda \rangle = \sum_{\mu} m_{\lambda\mu}^2$. Daraus folgt $w_\lambda = \pm \chi_{\tilde{\lambda}}$ für eine geeignete Partition $\tilde{\lambda}$.

Wir zeigen die Frobeniusformel nun durch absteigende Induktion bzgl. der Ordnung $>$. Ist $\lambda = (n)$ die größte Partition der Länge n , so gilt nach (8) die Gleichheit

$$w_\lambda = \psi_\lambda = \sum_{\mu} n_{\lambda\mu} \chi_\mu.$$

und aufgrund von $n_{\lambda\lambda} = 1, n_{\lambda\mu} = 0$ sonst, folgt $w_\lambda = \chi_\lambda$.

Ist per Induktion $\chi_\mu = w_\mu$ für alle $\mu > \lambda$, so wird (7) und (8)

$$w_\lambda + \sum_{\mu > \lambda} K_{\mu\lambda} \chi_\mu = \Psi_\lambda = \sum_{\mu} n_{\lambda\mu} \chi_\mu.$$

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit der χ_μ folgt hieraus wieder $w_\lambda = \chi_\lambda$, wie es zu zeigen war. \square

6 Schur-Funktoren

Bisher haben wir ausschließlich Darstellungen endlicher Gruppen betrachtet. In der Differentialgeometrie oder algebraischen Geometrie treten oft Darstellungen von Gruppen wie $GL_n(\mathbb{C})$ auf. Wir wollen hier nicht definieren, was eine Lie-Gruppe oder eine algebraische Gruppe ist. Wir spezifizieren auch hier nicht, was man unter einer Darstellung einer solchen Gruppe G versteht, d.h. was man von $\rho: G \rightarrow GL(V)$ zur Eigenschaft Homomorphismus noch zusätzlich verlangt. Es ist jedoch offensichtlich, dass ein nützlicher Begriff die Darstellung $\text{id}: GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL(V)$ für $V = \mathbb{C}^n$ beinhalten sollte. Durch komponentenweises Abbilden erhalten wir auch einen Homomorphismus $\rho_{n,d}: GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL(V^{\otimes d})$ für alle $d \in \mathbb{N}$.

Wenn wir diese Darstellung zerlegen, sollten wir uns daran erinnern, dass wir Halbeinfachheit nur für endliche Gruppen gezeigt haben und dass dies für beliebige Lie-Gruppen (obere Dreiecksmatrizen!) offensichtlich falsch ist. Ziel dieses Abschnitts ist es offensichtliche direkte Summanden von Darstellungen wie $\rho_{n,d}$ mit Hilfe des Wissens über Darstellungen von S_d und deren Dimension zu ermitteln. Die Frage nach Irreduzibilität (als Darstellung von $GL_n(\mathbb{C})$ oder als Darstellung einer Untergruppe) werden wir für $GL_n(\mathbb{C})$ mitbeantworten, für Untergruppen ist Strukturtheorie von Liegruppen nötig.

Wir beginnen mit der Zerlegung $V \otimes V = \text{Sym}^2(V) \oplus \Lambda^2(V)$ aus Abschnitt 4.3. Dort hatten wir auch gesehen, dass in der Zerlegung von $V \otimes V \otimes V$ neben $\text{Sym}^3 V$ und $\Lambda^3 V$ aus Dimensionsgründen für $n = \dim V \geq 2$ noch mindestens ein weiterer Summand auftreten muss. Allgemeiner betrachten wir die Linksoperation von S^d auf $V^{\otimes d}$ durch Permutation, d.h. für $\tau \in S^d$ ist

$$\tau \cdot (v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_d) = v_{\tau(1)} \otimes v_{\tau(2)} \otimes \dots \otimes v_{\tau(d)}.$$

Dieses bestimmt offenbar auch einen Algebrenhomomorphismus $\mathbb{C}[S_d] \rightarrow \text{End}(V^{\otimes d})$, welcher mit der Rechtsoperation von $GL_n(\mathbb{C})$ kommutiert. Sei nun c_λ der Young-Symmetrisierer zu einer Partition λ von d . Dann definieren wir

$$\mathcal{S}_\lambda(V) = \text{Im}(c_\lambda) \subseteq V^{\otimes d}.$$

Dies ist also wieder ein Vektorraum mit einer Operation von $GL_n(\mathbb{C})$. Das würde für alle Elemente in $\mathbb{C}[S_d]$ gelten, aber es stellt sich heraus, dass die Bilder der Young-Symmetrisierer den Raum $V^{\otimes d}$ in direkte Summanden zerlegen. Die Vektorräume $\mathcal{S}_\lambda(V)$ werden *Weyl-Module* oder auch *Schur-Funkoren* genannt. (Eigentlich ist die Zuordnung $V \mapsto \mathcal{S}_\lambda(V)$ der Funktor.)

Als Beispiel bestimmen wir für $\lambda = (2, 1)$ den Raum \mathcal{S}_λ . Es ist $c_{(2,1)} = [\text{id}] + [(12)] - [(13)] - [(132)]$, also wird $\mathcal{S}_\lambda(V)$ von den Vektoren

$$v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 + v_2 \otimes v_1 \otimes v_3 - v_3 \otimes v_2 \otimes v_1 - v_3 \otimes v_1 \otimes v_2$$

mit $v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \in V$ beliebig aufgespannt. Durch

$$(v_1 \wedge v_3) \otimes v_2 \mapsto v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 - v_3 \otimes v_2 \otimes v_1$$

wird eine Abbildung $\Lambda^2 V \otimes V \rightarrow V^{\otimes 3}$ definiert. Also ist $\mathcal{S}_{(2,1)}$ gleich dem Bild von $(v_1 \wedge v_3) \otimes v_2 + (v_2 \wedge v_3) \otimes v_1$, was man wiederum als Kern der Abbildung $\Lambda^2 V \otimes V \rightarrow \Lambda^3 V$, $(v_1 \wedge v_2) \otimes v_3 \mapsto v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$ interpretieren kann. Es ist

$$\dim(\Lambda^3 V) = \binom{n}{3}, \dim(\Lambda^2 V \otimes V) = \binom{n}{2} \cdot n = \frac{n^2(n-1)}{2},$$

also $\dim \mathcal{S}_{(2,1)} = (n+1)n(n-1)/3$. Wegen $\dim(\text{Sym}^3 V) = \binom{n+2}{n-1} = \binom{n+2}{3}$ ist also

$$\dim V^{\otimes 3} = n^3 = \dim \text{Sym}^3(V) + 2 \cdot \dim \mathcal{S}_{(2,1)}(V) + \dim \Lambda^3(V)$$

und der folgende Satz enthält die entsprechende Zerlegungsaussage als Spezialfall.

Satz 6.1 (1) Für $\dim V = n$ ist der Weyl-Modul $\mathcal{S}_\lambda(V)$ der Nullmodul, falls $\lambda_{n+1} \neq 0$. Ist $(\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0)$, so ist

$$\dim \mathcal{S}_\lambda(V) = \mathcal{S}_\lambda(1, \dots, 1) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i}$$

der Wert des entsprechenden Schurpolynoms an der Stelle $(1, \dots, 1)$. Genauer ist für $g \in GL_n(\mathbb{C})$ die Spur der Darstellung gegeben durch

$$\chi_{\mathcal{S}_\lambda}(g) = \mathcal{S}_\lambda(x_1, \dots, x_n),$$

wobei x_1, \dots, x_n die Eigenwerte von g sind.

Satz 6.2 (2) *Der Vektorraum $V^{\otimes d}$ zerlegt sich als*

$$V^{\otimes d} \cong \bigoplus_{\lambda+d} (\mathcal{S}_\lambda(V))^{\otimes m_\lambda},$$

wobei $m_\lambda = \dim V_\lambda$ die Dimension der irreduziblen S_d -Darstellung V_λ ist.

Darüber hinaus ist jeder Weyl-Modul irreduzibel als Darstellung von $GL_n(\mathbb{C})$.