FORSCHUNGSSEMINAR DARMSTADT-FRANKFURT WISE 14/15

PRIME GAPS

Organization: Philipp Habegger[1] *und Linda Frey*[2]

Ziel dieses Seminars ist es, den folgenden Satz von Zhang [7] zu beweisen. Bezeichnet $2 = p_1 < p_2 < \cdots$ die Folge der Primzahlen, so gilt es eine Zahl B mit

$$p_{n+1} - p_n \leq B$$

für unendlich viele n. Zhang erhielt den Wert $B = 7 \cdot 10^7$. Wir folgen dabei dem neueren Beweis von Maynard-Tao [5], welche den Wert $B = 600$ liefert. Dieses Argument vermag sogar zu zeigen, dass es zu jedem $m \in \mathbb{N}$ unendlich viele n mit

$$p_{n+m} - p_n \leq B$$

gibt.

Im Laufe des Seminars lernen wir das große Sieb der analytischen Zahlentheorie kennen und beweisen unterwegs den Satz von Bombieri-Vinogradov über Primzahlen in arithmetischen Folgen. Dieses bereits für sich interessante Resultat dient als Zwischenschritt auf dem Weg zu unserem Ziel. Zusätzlich werden wir eine Variation des Siebs von Selberg kennenlernen.

Die Vorträge bauen hauptsächlich auf der Originalarbeit von Maynard [5] auf. Ergänzend benötigen wir einen Übersichtsarbeit von Vaughan [6] über das große Sieb und den Satz von Bombieri-Vinogradov.

Termine

1.	2.	3.	4.	5.	6.
30. Oktober	20. November	4. Dezember	18. Dezember	22. Januar	12. Februar
Darmstadt	Frankfurt	Darmstadt	Frankfurt	Darmstadt	Frankfurt

1. Termin — Raum 234 (Darmstadt), ab 15.20, 30. Oktober

Einführung

Philipp Habegger

Kurze Einführung und Übersicht über den weiteren Verlauf des Seminars.

Primzahlen in arithmetischen Progessionen gemittelt: Der Satz von Bombieri-Vinogradov

Philipp Habegger

Inhalt: Satz von Siegel-Walfisz, Beweisskizze mit expliziter Formel. Nullstellenfreier Bereich von Dirichlet L-Funktionen und Konsequenz der verallgemeinerten Riemannschen

[1] habegger@mathematik.tu-darmstadt.de
[2] raabe@mathematik.tu-darmstadt.de

Vermutung. Satz von Bombieri-Vinogradov [6] wird formuliert und mit Siegel-Walfisz vergleichen.

Erster Schritt Richtung Bombieri-Vinogradov
Francesco Veneziano
Inhalt: Hier wird Bombieri-Vinogradov auf das sogenannte "Basic Mean Value Theorem" [6] reduziert. Ab "All proofs of the above..." auf Seite 3 bis Ende Abschnitt 1. In diesem Vortrag könnte nach Wunsch partielle Summation kurz repetiert werden.

2. Termin — Raum 711 gr. (Frankfurt), ab 15.15, 20. November

Das große Sieb I
Kolja Hept
Inhalt: Einführung in das große Sieb von Bombieri, Montgomery, Roth, Selberg, Vaughan etc. Abschnitt 2 [6] bis und mit "Duality Lemma". Dieses Lemma ist eine Vorbereitung auf die Siebungleichung, die im nächstem Vortrag bewiesen wird. Als Anwendung der Siebungleichung kann der Satz von Linnik [3, Theorem 7.16] präsentiert werden.[3] Im Beweis von Theorem 7.16 gibt es einen Tippfehler, die Referenz (7.8) müsste auf Ungleichung (7.38) verweisen. Diese Ungleichung taucht im Skript von Vaughan als (schwächere) Aussage

$$Z \ll \frac{N+Q^2}{\sum_{p\le Q}\rho(p)/p}$$

auf, die aber für die Anwendung ausreicht.[4] Kombierien wir die Notation in Iwaniec-Kowalski mit der von Vaughan, so müsste für $p \geq 3$

$$\rho(p) = \begin{cases} 0 & : \text{falls } q(p) \leq N^{\epsilon}, \\ \frac{p-1}{2} & : \text{falls } q(p) > N^{\epsilon} \text{ und } p \leq N^{1/2} \end{cases}$$

gelten.

Das große Sieb II
Quentin Gendron
Inhalt: Das große Sieb, Seite 10 [6], wird formuliert und bewiesen. (Nach Möglichkeit kann direkt die stärkere Version $\lambda_1(N,\delta) \ll N + 1/\delta, \lambda(N,Q) \ll N + Q^2$ gezeigt werden, siehe [3, Seite 177 nach Ende des Beweises von Theorem 7.7]. Wer ganz ambitioniert ist, kann die optimale Version von Montgomery-Selberg-Vaughan [3, Theorem 7.7] präsentieren.) Weiterhin wir die Ungleichung von Pólya-Vinogradov vorgestellt und beweisen (bis mitte Seite 14 [6]).

3. Termin — Raum 234 (Darmstadt), ab 15.20, 4. Dezember

Eine Siebungleichung für Charaktere
Sven Möller
Inhalt: Hier wird die Siebungleichung verwendet, um "A Large Sieve for Characters" [6] zu beweisen. Danach folgen einige technische Abschätzungen (bis Ende Abschnitt 4).

---

[3] Diese Anwendung ist für den späteren Verlauf des Seminars unwichtig.

[4] Roths Version des großen Siebs liefert den schwächeren Nenner $N + Q^2 \log Q$, sollte aber für Linnik ausreichend sein.

Vaughan Identität und Ende des Beweises
Yingkun Li
Inhalt: Die Identität von Vaughan [6, Lemma 4] ermöglich es, gewichtete Summen über die von Mangoldt Funktion abzuschätzen. Danach wird der "Basic Mean Value Theorem" (Abschnitt 6 [6]) bewiesen. Nach Möglichkeit sollen Produkte von Dirichlet Reihen besprochen werden. Damit ist der Beweis des Satzes von Bombieri-Vinogradov abgeschlossen.

4. Termin — Raum 711 gr. (Frankfurt), ab 15.15, 18. Dezember

Überblick über den Satz von Maynard-Tao
Amir Dzambic
Inhalt: Ab jetzt widmen wir uns Theorem 1.3 und Theorem 1.4 [5]. (Theoreme 1.1 und 1.2 [5] können wir am Ende des Semesters ansprechen, falls noch Zeit bleibt.) Die Elliot-Halberstam Vermutung wird vorgestellt. Für $\theta < 1/2$ folgt diese Vermutung aus Bombieri-Vinogradov (die Implikation soll nur gezeigt werden, falls die Zeit reicht.) Abschnitt 2 [5] fasst die Strategie des Beweises zusammen. In diesem Vortrag sollen Propositionen 4.1, 4.2, und 4.3(1)-(2) formuliert werden. Danach soll 4.2 und Teile von 4.3 bewiesen werden. Teil (3) von Proposition 4.3 kann weggelassen werden. Proposition 4.1 wird uns noch einige Wochen beschäftigen.

Selbergs Sieb I
Ralf Butenuth
Inhalt: Es folgen zwei technische Vorträge. Der erste behandelt Lemma 5.1 [5].

5. Termin — Raum 234 (Darmstadt), ab 15.20, 22. Januar

Selbergs Sieb II
Moritz Dittmann / Sebastian Opitz
Inhalt: Lemma 5.2 [5].

Selbergs Sieb III
Sebastian Opitz / Moritz Dittmann
Inhalt: Lemmas 5.3, 6.1, und 6.2. Für den Beweis von Lemma 6.1 wird auf [1] und auf [2] verwiesen.

6. Termin — Raum 711 gr. (Frankfurt), ab 15.15, 12. Februar

Wahl der Parameter
Martin Möller
Inhalt: Lemma 6.3 und 8.1. Abschnitt 7 kann übersprungen werden, da er nur für den Beweis von Proposition 4.3(3) und daher Theorem 1.1/1.2 benötigt wird.

Ende des Beweises
Jakob Stix
Inhalt: Ein letztes technisches Lemma (8.2) und danach werden Teile 1 und 2 von Proposition 4.3 bewiesen.

Sollte Zeit übrigbleiben, können wir uns mit weiterführenden Themen der Siebtheorie [4] beschäftigen.

Literatur

1. D. A. Goldston, S. W. Graham, J. Pintz, and C. Y. Yıldırım, *Small gaps between products of two primes*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **98** (2009), no. 3, 741–774.
2. H. Halberstam and H.-E. Richert, *Sieve methods*, Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London-New York, 1974, London Mathematical Society Monographs, No. 4.
3. H. Iwaniec and E. Kowalski, *Analytic number theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
4. E. Kowalksi, *The Principle of the Large Sieve*, `http://www.math.ethz.ch/~kowalski/principle-large-sieve.pdf`.
5. J. Maynard, *Small gaps between primes*, `http://annals.math.princeton.edu/articles/8772`.
6. R. C. Vaughan, *The Bombieri-Vinogradov Theorem*, `http://www.personal.psu.edu/rcv4/Bombieri.pdf`.
7. Y. Zhang, *Bounded gaps between primes*, Ann. of Math. (2) **179** (2014), no. 3, 1121–1174, `http://annals.math.princeton.edu/2014/179-3/p07`.