Vorkurs Mathematik

Übungen zu Komplexen Zahlen

1 Komplexe Zahlen

Koordinatenwechsel

Aufgabe 1.1 Zeichnen Sie die folgende Zahlen zunächst in ein (kartesisches) Koordinatensystem. Bestimmen Sie dann die Polarkoordinaten der jeweiligen Zahl:

a) $z = 2 - 2i$ b) $z = -2 - 2i$ c) $z = 5$ d) $z = -3\,i$

e) $z = 3 - 3i$ f) $z = -1 + i$ g) $z = 0$

Aufgabe 1.2 Schreiben Sie z in Polar- bzw. Kartesischen Koordinaten

a) $z = -2 + 2i$ b) $z = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4})\right)$

Aufgabe 1.3 Berechnen Sie zu den folgenden Polarkoordinaten r, ϕ jeweils z in kartesischer Darstellung. Zeichnen Sie die entstehenden Zahlen in ein (kartesisches) Koordinatensystem.

a) $r = 2, \quad \phi = \frac{\pi}{2}$ b) $r = 2, \quad \phi = \frac{\pi}{4}$ c) $r = 2, \quad \phi = 4\pi + \frac{\pi}{2}$

d) $r = 4, \quad \phi = \frac{\pi}{2}$ e) $r = 4, \quad \phi = \frac{\pi}{4}$

Rechnen mit komplexen Zahlen

Aufgabe 1.4 Berechnen Sie $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$ sowie $\overline{z}$, $\frac{1}{z}$ und z^2 für folgende komplexe Zahlen z:

a) $z = 1 + i$ b) $z = -3$ c) $z = 2i$ d) $z = 3 + 4i$

Aufgabe 1.5 Für $z = 1 - i$ und $w = 1 + i$ berechnen Sie $z \cdot w$ sowie $\frac{w}{z}$.
Zeichnen Sie z und w sowie $z \cdot w$ und $\frac{w}{z}$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Welche Beziehungen gelten für die Winkel der 4 Zahlen?

Aufgabe 1.6 (Gleichung mit komplexen Zahlen): Für welche reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$2a - 3bi - a(1 + i) + 5b + 3 - i = 0 \qquad ?$$

Tipp: Analog zu Gleichungen mit Vektoren im $\mathbb{R}^2$, erhalten Sie aus der obigen Gleichung in *komplexen* Zahlen **zwei Gleichungen** in *reellen* Zahlen.

Gleichungen mit komplexen Zahlen

Aufgabe 1.7 Berechnen Sie z aus:

a) $3 - 2i = (5 + i) \cdot z$ b) $2 - 9i = (1 - 2i)(z - 3 + 4i)$

Tipp: Es ist möglich durch komplexe Zahlen $a + ib$ zu teilen!

Aufgabe 1.8 Skizzieren sie folgende Punktmengen in der komplexen Ebene:

a) $\{z \in \mathbb{C} \;:\; z^2 = 1\}$ b) $\{z \in \mathbb{C} \;:\; z^4 = 1\}$

c) $\{z \in \mathbb{C} \;:\; z^3 = 1\}$

Tipp: Nutzen Sie das Verhalten der Winkel bei der Multiplikation von komplexen Zahlen.

Aufgabe 1.9 Skizzieren sie folgende Punktmengen in der komplexen Ebene:

a) $\{z \in \mathbb{C} \;:\; 0 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 2,\;\; \mathrm{Re}(z) \geq 1\}$ b) $\{z \in \mathbb{C} \;:\; |z| \leq 6\}$

c) $\{z \in \mathbb{C} \;:\; |z - 1| \leq 2\}$ d) $\{z \in \mathbb{C} \;:\; |z - (1 + i)| \leq 1\}$

Tipp:
1) Die Zahl $w := z - (c + id)$ ist die Zahl, die zu $c + id$ addiert z ergibt: $(c + id) + w = z$. Von dieser Zahl w wird in c) und d) eine Aussage über die Länge gemacht.

2) Betrachten Sie einmal eine Darstellung von z als $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Es ergibt sich z. B.:

$$|a + bi \;-\; (3 + 4i)| \;=\; \sqrt{(a - 3)^2 + (b - 4)^2}$$

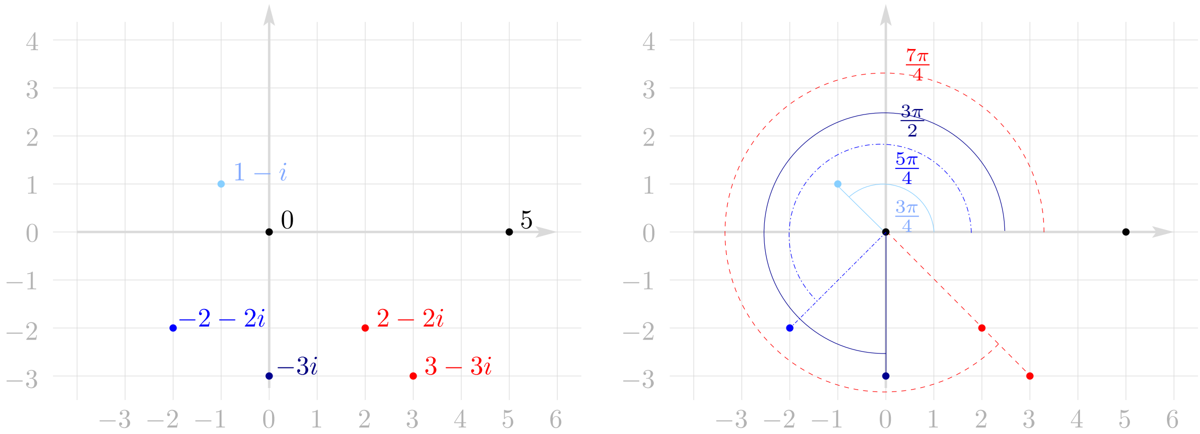
Im $\mathbb{R}^2$ gilt ganz analog:

$$\sqrt{(a - 3)^2 + (b - 4)^2} \;=\; \left|\left| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right|\right| \;=\; \textit{Der Abstand von } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \textit{ zu } \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2 Lösungen

Lösungen

Lösungen zu Aufgabe 1.1: Skizze:



Berechnen der Polarkoordinaten:

a)	$z = 2 - 2i$	$r = \sqrt{4+4} = 2 \cdot \sqrt{2},$	$\arg(z) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} \mathrel{\hat{=}} 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$
b)	$z = -2 - 2i$	$r = \sqrt{8},$	$\arg(z) = \pi + \arctan(1) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$
c)	$z = 5$	$r = 5,$	$\arg(z) = \arctan(0) = 0$
d)	$z = -3i$	$r = 3,$	$\arg(z) = \frac{3\pi}{2}$ (da $\mathrm{Re}(z) = 0$ und $\mathrm{Im}(z) < 0$.)
e)	$z = 3 - 3i$	$r = \sqrt{9+9} = 3 \cdot \sqrt{2},$	$\arg(z) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} \mathrel{\hat{=}} 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$
f)	$z = -1 + i$	$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},$	$\arg(z) = \pi + \arctan(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$
g)	$z = 0$	$r = 0,$	Der Winkel von $z = 0$ ist beliebig.

Lösungen zu Aufgabe 1.2:
Schreiben Sie z in Polar- bzw. Kartesischen Koordinaten

(a) $r = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = 2 \cdot \sqrt{2},$

$\arg(z) = \arctan \frac{-2}{2} + \pi = \arctan(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi \frac{3\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad z = 2 \cdot \sqrt{2} \, \left(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i \sin(\frac{3\pi}{4})\right)$

(b) In diesem Fall ist z bereits in Polarkoordinaten gegeben, der Radius is $r = \sqrt{2}$, Winkel ist $\phi = \frac{3\pi}{4}$.

Berechnung der kartesischen Koordinaten:

$\mathrm{Re}(z) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -1 \;,\; \mathrm{Im}(z) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad z = 1 - i$

Lösungen zu Aufgabe 1.3: Zu den gegebenen Polarkoordinaten von z die kartesischen Koordinaten berechnen:

(a) $$z = 2 \cdot \left(\underbrace{\cos(\frac{\pi}{2})}_{=0} + i \cdot \underbrace{\sin(\frac{\pi}{2})}_{=1} \right) = 2\, i$$

(b) $$z = 2 \cdot \left(\underbrace{\cos(\frac{\pi}{4})}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} + i \cdot \underbrace{\sin(\frac{\pi}{4})}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} \right) = \sqrt{2}\,(1 + \, i)$$

(c) $z = 2 \cdot \left(\underbrace{\cos(4\pi + \frac{\pi}{2})}_{=0} + i \cdot \underbrace{\sin(4\pi + \frac{\pi}{2})}_{=1} \right) = 2\,i$

Da $\cos(4\pi + x) = \cos(x)$ und $\sin(4\pi + x) = \sin(x)$ kann man die 4π im Winkel eigentlich sofort weglassen.

(d) $z = 4 \cdot \left(\underbrace{\cos(\frac{\pi}{2})}_{=0} + i \cdot \underbrace{\sin(\frac{\pi}{2})}_{=1} \right) = 4\,i$

(e) $z = 4 \cdot \left(\underbrace{\cos(\frac{\pi}{4})}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} + i \cdot \underbrace{\sin(\frac{\pi}{4})}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} \right) = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot (1 + \ i)$

Lösungen zu Aufgabe 1.4:
(Rechnungen mit komplexen Zahlen): Berechnen Sie $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z), \arg(z), \overline{z}, \frac{1}{z}, z^2$.

(a) $z = 1 + i$ $\qquad$ $\mathrm{Re}(z) = 1$, $\mathrm{Im}(z) = 1$,

$\arg(z) = \arctan(\frac{1}{1}) = \frac{\pi}{4}$,

$\overline{z} = 1 - i$,

$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{1-i}{1^2+1^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i$,

$z^2 = (1+i) \cdot (1+i) = 1^2 + 2 \cdot i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$

(b) $z = -3$ $\qquad$ $\mathrm{Re}(z) = -3$, $\mathrm{Im}(z) = 0$,

$\arg(z) = \pi + \arctan(\frac{0}{-3}) = \pi + 0 = \pi$

$\overline{z} = -3$,

$\frac{1}{z} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$,

$z^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$

(c) $z = 2\,i$ $\qquad$ $\mathrm{Re}(z) = 0$, $\mathrm{Im}(z) = 2$,

$\arg(z) = \frac{\pi}{2}$ (Der Winkel ergibt sich ohne Rechnen, da $\mathrm{Re}(z) = 0$ und $\mathrm{Im}(z) > 0$.)

$\overline{z} = -2i$,

$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{-2i}{(-2i)(2i)} = \frac{-2i}{4} = -\frac{1}{2} i$,

$z^2 = -4$

(d) $z = 3 + 4\,i$ $\qquad$ $\mathrm{Re}(z) = 3$, $\mathrm{Im}(z) = 4$,

$\arg(z) = \arctan(4/3) \simeq 0.6435 \simeq 0.2048 \cdot \pi$

$\overline{z} = 3 - 4i$,

$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{3-4i}{3^2+4^2} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25} i$,

$z^2 = (3+4i) \cdot (3+4i) = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4i + (4i)^2 = 9 - 16 + 24i = -7 + 24i$

Lösungen zu Aufgabe 1.5:
Berechnen von $z + w$, $z \cdot w$ sowie $\frac{z}{w}$. $z = 1 - i$, $w = 1 + i$, (bemerke: $w = \overline{z}$)

- $z \cdot w = (1-i) \cdot (1+i) = 1 \cdot (1+i) - i \cdot (1+i) = 1 + i - i - i^2 = 1 - (-1) = 2$

- $\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{(1-i)\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)} = \frac{1-2i+i^2}{1-i^2} = \frac{-2i}{2} = -i$

Durch eine Zeichnung kann man $\arg(w) = \frac{pi}{4}$ und $\arg(z) = -\frac{pi}{4} \mathrel{\hat{=}} 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ verifizieren.

- Es gilt: $\arg(w \cdot z) = \arg(2) = 0$ und $\arg(z) + \arg(w) = 0$.
  Also gilt $\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$ (wie stets bei komplexer Multiplikation).
- Es gilt: $\arg(z/w) = \arg(-i) = \frac{3\pi}{2}$ und $\arg(z) - \arg(w) = \frac{-2\pi}{4} \mathrel{\hat{=}} 2\pi - \frac{2\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$.
  Also gilt $\arg(z/w) = \arg(z) - \arg(w)$ (wie stets bei komplexer Division).

Lösungen zu Aufgabe 1.6:
(Gleichung mit komplexen Zahlen) Zunächst multipliziert man aus und sammelt alle Terme die i enthalten (Imaginärteil) zusammen:

$$\begin{array}{lll} & 2a - 3bi - a(1+i) \quad +5b+3-i & = \ 0 \ | \\ \Leftrightarrow & 2a - 3bi - a - a\,i \quad\quad +5b+3-i & = \ 0 \ | \\ \Leftrightarrow & (2a - a + 5b + 3) + (-3b - a - 1)\,i & = \ 0 \ | \end{array}$$

Damit die Gleichung erfüllt ist, muss der Imaginärteil und der Realteil der Zahl links *gleichzeitig* Null sein.
Man erhält also *zwei* Gleichungen

$$\begin{array}{lrcl} \mathrm{Re}: & a+5b+3 & = & 0 \\ \mathrm{Im}: & -a-3b-1 & = & 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{llcl} \mathrm{Re}': & a+5b+3 & = & 0 \\ \mathrm{Im}': & a & = & -3b-1 \end{array}$$

Einsetzen der zweiten Gleichung in die erste liefert:

$$(-3b-1) + 5b + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2b + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = -1$$

Einsetzen von $b = -1$ in die erste Gleichung liefert:

$$a = 3\,(-1) + 1 = -2$$

Lösung: $a = -2$, $b = -1$.

Lösungen zu Aufgabe 1.7:
(Gleichungen mit komplexen Zahlen): Berechnen Sie z aus:

(a)

$$\begin{array}{lcll} & 3-2i & = & (5+i)\cdot z \quad |:(5-i) \\ \Leftrightarrow & \underbrace{\frac{(3-2i)}{(5+i)}}_{=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i} & = & z \end{array}$$

$$\boxed{\mathrm{NR}\ \frac{(3-2i)}{(5+i)} = \frac{(3-2i)\cdot(5-i)}{(5+i)\cdot(5-i)} = \frac{13-13i}{5^2+1^2} = \frac{13-13i}{26}}$$

Also folgt $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

(b) Ausmultiplizieren bringt $2-9i = z(1-2i) + 10i + 5$. Auflösen ergibt $z = \frac{3+19i}{2i-1} = 7-5i$

$$\begin{array}{lcll} & (2-9i) & = & (1-2i)\quad (z-3+4i) \quad |:(1-2i) \\ \Leftrightarrow & \underbrace{\frac{(2-9i)}{(1-2i)}}_{=4-i} & = & z-3+4i \quad |+3-4i \\ \Leftrightarrow & 4-i+3-4i & = & z \end{array}$$

$$\boxed{\mathrm{NR}\ \frac{(2-9i)}{(1-2i)} = \frac{(2-9i)\cdot(1+2i)}{(1+2i)\cdot(1+2i)} = \frac{20-5i}{1^2+2^2} = 4-i}$$

Also folgt $z = 7-5i$.

Lösungen zu Aufgabe 1.8:
c) Um $z^3 = 1$ zu lösen, benutzt man Polarkoordinaten:

Gilt $z^3 = 1$, so müssen auch die Winkel und Radii der beiden Zahlen gleich sein. Also muss für den Radius $|z|$ von z gelten:

$$|z|^3 = \underbrace{|z^3| \quad = \quad |1|}_{\text{gilt wegen } z^3 = 1} = 1.$$

Weil $|z|$ eine reelle Zahl ist, kommt also nur $|z| = 1$ in Frage.
Für den Winkel $\alpha := \arg(z)$ von z muss gelten:

$$\underbrace{\arg(z^3) = 3 \cdot \arg(z)}_{\text{gilt wegen } \arg(x \cdot y) = \arg(x) + \arg(y)} = 3 \cdot \alpha = \arg(1)$$

Der Winkel von 1 ist eigentlich $\arg(1) = 0$, allerdings ist dies nur eindeutig bis auf vielfache von 2π. Mit anderen Worten: auch $\arg(1) = 2n \cdot \pi$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist richtig. Dies heißt also, dass $\arg(z^3) = 3\alpha$ ein vielfaches von 2π sein muss! Es gibt nun drei Möglichkeiten:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 3\alpha = 0 \cdot 2\pi & & 3\alpha = 1 \cdot 2\pi & & 3\alpha = 2 \cdot 2\pi \\ \Downarrow & \text{oder} & \Downarrow & \text{oder} & \Downarrow \\ \alpha = 0 & & \alpha = 1 \cdot \frac{2\pi}{3} & & \alpha = 2 \cdot \frac{2\pi}{3} \end{array}$$

Die Lösungen mit größeren Werten für n in $3\alpha = n \cdot 2\pi$ liefern keine neuen Lösungen von $z^3 = 1$:

- Die Lösung $2\alpha = 6\pi$ liefert $\alpha = 2\pi$, und dies liefert das selbe z wie $\alpha = 0$.
- Die Lösung $2\alpha = 8\pi$ liefert $\alpha = 8\pi/3 = 2\pi + (2\pi/3)$, und dies liefert das selbe z wie $\alpha = (2\pi/3)$.
- Die Lösung $2\alpha = 10\pi$ liefert $\alpha = 10\pi/3 = 4\pi + 2 \cdot (2\pi/3)$, und dies liefert das selbe z wie $\alpha = 2 \cdot (2\pi/3)$.

Berechnet man nun die entsprechenden Punkte z aus α so erhält man die drei Lösungen:

für $\alpha = 0$	$z_1 = 1$
für $\alpha = \frac{2\pi}{3}$	$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
für $\alpha = 2 \cdot \frac{2\pi}{3}$	$z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

- Die einzigen Lösungen von $z^2 = 1$ sind $z_1 = 1$ und $z_2 = -1$.

  In Polarkoordinaten gilt:

  $$\begin{aligned} |z_1| &= 1 \qquad & \arg(z_1) &= 0 \\ |z_2| &= 1 \qquad & \arg(z_2) &= \pi \end{aligned}$$

- Die einzigen Lösungen von $z^4 = 1$ sind $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1$ und $z_4 = -i$. .

  In Polarkoordinaten gilt:

  $$\begin{aligned} |z_1| &= 1 \qquad & \arg(z_1) &= 0 \\ |z_2| &= 1 \qquad & \arg(z_2) &= 1 \cdot \tfrac{2\pi}{4} \\ |z_3| &= 1 \qquad & \arg(z_2) &= 2 \cdot \tfrac{2\pi}{4} \\ |z_4| &= 1 \qquad & \arg(z_2) &= 3 \cdot \tfrac{2\pi}{4} \end{aligned}$$

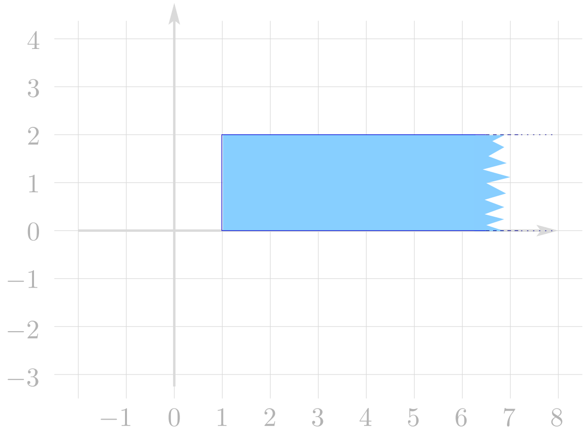


Abbildung 1: Lösung Aufgabe 1.9 a)

- Die einzigen Lösungen von $z^3 = 1$ sind $z_1 = 1$, $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ und $z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. .
  In Polarkoordinaten gilt:

$$\begin{aligned} |z_1| &= 1 \qquad \arg(z_1) = 0 \\ |z_2| &= 1 \qquad \arg(z_2) = 1 \cdot \tfrac{2\pi}{3} \\ |z_3| &= 1 \qquad \arg(z_2) = 2 \cdot \tfrac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Lösungen zu Aufgabe 1.9:
(Geometrie) Skizzieren sie folgende Punktmengen in der kompl. Ebene:

(a) Die Geraden $\mathrm{Im}(z) = 0, \mathrm{Im}(z) = 2, \mathrm{Re}(z) = 1$ teilen die Zahlenebene in 6 Bereiche auf, die gesuchte Punktmenge ist einer davon – eine Art *Halbstreifen* (s. Abbildung 1).

(b) Innere des Kreises um $z = 0$ mit Radius 6, Kreislinie eingeschlossen.

(c) Innere des Kreises um $z = 1$ mit Radius 2, Kreislinie eingeschlossen (also eine um die Zahl "1" nach rechts verschobener Kreisscheibe).

(d) Innere des Kreises um $z = 1 + i$ mit Radius 1, Kreislinie eingeschlossen (also eine um die Zahl "$1 + i$" verschobene Kreisscheibe).