Mathe-Vorkurs
Übungen zu Taylorreihen und zum Differenzieren

1 Taylorreihenentwicklung

Aufgabe 1.1 (Taylorreihentwicklung): Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x) = x\sin(x)$ für $x_0 = 0$. Berechnen Sie dazu die ersten vier Ableitungen und schließen Sie auf alle weiteren.

Aufgabe 1.2 (Entwicklungspunkt): Weil $\ln(0)$ nicht definiert ist, lässt sich auch die Taylorreihe bei $x = 0$ nicht berechnen. Berechnen Sie die Taylorreihe von $f(x) = \ln(1 + x)$ für $x_0 = 0$.

Aufgabe 1.3 (Einsetzen): Um $\sqrt{1.2}$ zu berechnen, verwendet Ihr Taschenrechner ein Taylor-Polynom von $f(x) = \sqrt{1+x}$ für $x_0 = 0$. Machen Sie es ihm nach, indem Sie das Taylor-Polynom von $f(x)$ bis zum 4. Glied berechnen und dann 0.2 einsetzen. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Ihres Taschenrechners.

Aufgabe 1.4 (Polynome): Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x) = x^2 + 1$ einmal für den Enwicklungspunkt $x_0 = 0$ und einmal für den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$. Vergleichen Sie beide Ergebnisse. Was vermuten Sie, wird herauskommen, wenn man die Taylorreihe für $x^{27} + 3x^{12} + 17$ berechnet?

2 Differenzieren im $\mathbb{R}^n$ (Partielle Ableitungen)

Aufgabe 2.1 (Partielle Ableitungen und Gradient): Bestimmen Sie die partielle Ableitung von $f(x, y) := x^2y^3 + xy^2 + 2y$ sowie den Gradienten von f an der Stelle (x, y) und an der Stelle $(0, 1)$.

Aufgabe 2.2 (Mehrfache partielle Ableitungen): Bestimmen Sie für die Funktion $f(x, y, z) := x^3 \cos(e^{xy})$ die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}$ sowie $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right)$.

Aufgabe 2.3 (Extrempunkte): Eine notwendige Bedingung dafür, dass eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt x_0 ein lokales Extremum hat, ist bekanntlich $f'(x_0) = 0$. Im mehrdimensionalen ist es ähnlich. Hier muss der Gradient der Funktion verschwinden.
Finden Sie für die Funktionen

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$
2. $g(x, y) = x^2 - y^2$

die Punkte mit Gradient $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Überlegen sie dann, ob diese Punkte tatsächlich lokale Extreme für die jeweilige Funktion sind.

Aufgabe 2.4 (Gradient): Bestimmen Sie $\mathrm{grad}(f)$ für $f(x, y, z) := xe^{y\sin(xz)}$. Berechnen Sie damit den Gradienten von f an der Stelle $(\frac{\pi}{2}, 1, 1)$, d.h. setzen Sie $(x, y, z) = (\frac{\pi}{2}, 1, 1)$ ein.

3 Lösungen zu Taylorreihen

Lösung zu Aufgabe 1.1
Gesucht: Die Taylorreihe von $f(x) = x\sin(x)$ am Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

$$\begin{array}{lclll}
f(x) & = & x\cdot\ \sin(x) & & \\
f^{(1)}(x) & = & x\cdot\ \cos(x) & +\sin(x) & \\
f^{(2)}(x) & = & x\cdot(-\sin(x)) & \cos(x) & +\cos(x) \\
f^{(3)}(x) & = & x\cdot(-\cos(x)) & -\sin(x) & -2\sin(x) \\
f^{(4)}(x) & = & x\cdot\ \sin(x) & -\cos(x) & -3\cos(x)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
f(0) & = & 0 \\
f^{(1)}(0) & = & 0 \\
f^{(2)}(0) & = & 2 \\
f^{(3)}(0) & = & 0 \\
f^{(4)}(0) & = & -4
\end{array}$$

es ergibt sich also $f(0) = 0, f^{(2)}(0) = 2, f^{(4)}(0) = -4, f^{(6)}(0) = 6, \ldots$. Entsprechend gilt:

$$Tf_0(x) = +2\frac{x^2}{2!} - 4\frac{x^4}{4!} + 6\frac{x^6}{6!} - 8\frac{x^8}{8!} + \cdots$$

In allgemeiner Schreibweise ergibt sich:

$$f^{2k+1}(0) = 0 \ \text{ für } k = 0, 1, 2, 3\ldots \quad \text{und} \quad f^{2k}(0) = (-1)^k \cdot 2k.$$

Bemerke: alle graden Zahlen lassen sich als $2k$ schreiben, alle ungeraden als $2k+1$, und $(-1)^k$ wechselt das Vorzeichen mit wachsendem k. Die Taylorreihe lautet also (unter weglassen der Monome mit ungeradem Grad):

$$Tf_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k)\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Lösung zu Aufgabe 1.2
Gesucht: Die Taylorreihe von $f(x) = \ln(1 + x)$ am Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

$$\begin{array}{lcrl}
f(x) & = & & \ln(1+x) \\
f^{(1)}(x) & = & & (1+x)^{-1} \\
f^{(2)}(x) & = & -1 & (1+x)^{-2} \\
f^{(3)}(x) & = & 2\cdot 1 & (1+x)^{-3} \\
f^{(4)}(x) & = & -3\cdot 2\cdot 1 & (1+x)^{-4} \\
f^{(5)}(x) & = & \underbrace{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}_{=4!=(5-1)!} & (1+x)^{-5}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcrcr}
f(0) & = & \ln(1) = 0 & & \\
f^{(1)}(0) & = & 1 & = & 0! \\
f^{(2)}(0) & = & -1 & = & -1! \\
f^{(3)}(0) & = & 2\cdot 1 & = & 2! \\
f^{(4)}(0) & = & -3\cdot 2\cdot 1 & = & -3! \\
f^{(5)}(0) & = & 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 & = & 4!
\end{array}$$

Entsprechend ergibt sich: $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)!$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$
Der Term $f(0) = 0$ lässt sich leider nicht in dieses Schema pressen. Da der entsprechende Summand aber den Wert 0 hat, können wir ihn kurzerhand beim Summieren weglassen, die Summe beginnt also bei $k = 1$. Die Taylorreihe lautet:

$$Tf_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\cdot(k-1)!\frac{x^k}{k!} \quad = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}.$$

Oder in expandierter Form:

$$\begin{array}{rcllllll}
Tf_0(x) & = & +1\cdot\frac{x}{1} & -1\cdot\frac{x^2}{2!} & +2\cdot\frac{x^3}{3!} & -3\cdot 2\cdot\frac{x^4}{4!} & +\cdots \\
& = & +x & -\frac{x^2}{2} & +\frac{x^3}{3} & -\frac{x^4}{4} & +\cdots
\end{array}$$

Lösung zu Aufgabe 1.3
Gesucht: Die Taylorpolynom vom Grad 4 der Funktion $f(x) = (1+x)^{1/2}$ am Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

$$\begin{array}{rcrl}
f(x) & = & & (1+x)^{\frac{1}{2}} \\
f^{(1)}(x) & = & \frac{1}{2} & (1+x)^{-\frac{1}{2}} \\
f^{(2)}(x) & = & -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} & (1+x)^{-\frac{3}{2}} \\
f^{(3)}(x) & = & \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4} & (1+x)^{-\frac{5}{2}} \\
f^{(4)}(x) & = & -\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{8} & (1+x)^{-\frac{7}{2}}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
f(0) & = & 1 \\
f^{(1)}(0) & = & \frac{1}{2} \\
f^{(2)}(0) & = & -\frac{1}{4} \\
f^{(3)}(0) & = & \frac{3}{8} \\
f^{(4)}(0) & = & -\frac{15}{16}
\end{array}$$

Das Taylorpolynom lautet also

$$T_0^4 f(x) = 1 + \frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{2!} - \frac{3}{8}\cdot\frac{x^2}{3!} + \frac{15}{16}\cdot\frac{x^4}{4!} \quad = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4.$$

Nach einsetzen erhält man

$$T_0^4 f(0.2) = 1 + \frac{1}{2}(0.2) - \frac{1}{8}(0.2)^2 + \frac{1}{16}(0.2)^3 - \frac{5}{128}(0.2)^4 = 1.0954375$$

Mit dem Taschenrechner sollten Sie $\sqrt{1.2} = 1.0954451150103322\ldots$ erhalten.

Lösung zu Aufgabe 1.4
Gesucht: Die Taylorpolynom vom Grad 4 der Funktion $f(x) = 1 + x^2$ am Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und am Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

$$\begin{array}{rcl}
f(x) & = & x^2+1 \\
f^{(1)}(x) & = & 2x \\
f^{(2)}(x) & = & 2 \\
f^{(3)}(x) & = & 0 \\
f^{(4)}(x) & = & 0
\end{array}
\quad
\begin{array}{rcl}
f(0) & = & 1 \\
f^{(1)}(0) & = & 0 \\
f^{(2)}(0) & = & 1 \\
f^{(3)}(0) & = & 0 \\
\end{array}
\quad
\begin{array}{rcl}
f(1) & = & 2 \\
f^{(1)}(1) & = & 2 \\
f^{(2)}(1) & = & 2 \\
f^{(3)}(1) & = & 0 \\
\end{array}$$

Für $k \geq 3$ gilt $f^{(k)} = 0$, die entsprechenden Terme können also in der Taylorreihe weggelassen werden. Erste Einsicht also: Die Taylorreihe für ein Polynom ist ein Polynom.
Das Taylorpolynom mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ lautet

$$T_0 f(x) = 1 + 0\cdot x + 2\cdot\frac{x^2}{2!} = 1 + x^2$$

Das Taylorpolynom mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ lautet

$$T_1 f(x) = 2 + 2\cdot(x-1) + 2\cdot\frac{(x-1)^2}{2!} = 2 \quad + 2x - 2 \quad + x^2 - 2x + 1 \quad = x^2 + 1$$

Die beiden Taylorreihen/polynome sind also gleich. Dies ist immer so: Die Taylorreihe eines Polynoms ist das Polynom selbst.

4 Lösungen zu partiellen Ableitungen

Lösung zu Aufgabe 2.1
Gesucht: Die partiellen Ableitungen und der Gradient von $f(x,y) := x^2y^3 + xy^2 + 2y$ Punkt $(x,y) = (0,1)$.

$$\frac{\delta f(x,y)}{\delta x} = 2xy^3 + y^2 \qquad \frac{\delta f(x,y)}{\delta y} = x^2\cdot 3y^2 + x\cdot 2y + 2$$

Der Gradient von f lautet also:

$$\text{grad}f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy^3 + y^2 \\ 3x^2y^2 + 2xy + 2 \end{pmatrix} \qquad \text{grad}f(0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 2.2
Gesucht: Einige partiellen Ableitungen der Funktion $f(x,y,z) := x^3 \cos(e^{xy})$

$$\frac{\delta f(x,y,z)}{\delta z} = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right) = 0$$

Zu der zweiten Gleichung: Die Funktion $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$ lässt sich berechnen (s.u.), sie hängt aber –genauso wie f – nicht von z ab. Entsprechend ist ihre partielle Ableitung nach z einfach die Zahl 0. Nur der Vollständigkeit halber:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 3x^2 \cdot \cos(e^{xy}) \quad + x^3 \cdot (-sin(e^{xy})) \cdot e^{xy} \cdot y$$

Lösung zu Aufgabe 2.3
Gesucht: Mögliche Extrema der Funktionen $f(x,y) := x^2 + y^2$ und $g(x,y) := x^2 - y^2$. Es gilt

$$\text{grad}(f) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

und damit verschwindet der Gradient nur im Punkt $(0,0)$. Da $f(0,0) = 0$ und $f(x,y) \geq 0$ für alle x, y ist $(0,0)$ ein lokales (und sogar globales) Extremum von f.
Weiter gilt

$$\text{grad}(g) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$$

und erneut verschwindet der Gradient nur im Punkt $(0,0)$ mit $g(0,0) = 0$. Allerdings ist offensichtlich, dass g in jeder Umgebung (anschaulich in jedem Kreis um $(0,0)$ mit kleinem Radius) von $(0,0)$ positive Werte, falls $x > y$ und negative Werte, falls $y > x$ ist, annimmt. Damit kann $(0,0)$ kein Extremum sein, solch ein Punkt wird *Sattelpunkt* genannt.

Lösung zu Aufgabe 2.4
Rechenarbeit liefert

$$\text{grad}(f) = e^{y\sin(xz)} \begin{pmatrix} 1 + xyz\cos(xz) \\ x\sin(xz) \\ yx^2\cos(xz) \end{pmatrix}$$

und wegen $\sin(\pi/2) = 1, \cos(\pi/2) = 0$ folgt

$$\text{grad}(f)(\pi/2, 1, 1) = e \begin{pmatrix} 1 \\ \pi/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ e\pi/2, \\ 0 \end{pmatrix}$$