Vorkurs Mathematik
Übungen zu Differentialgleichungen

Als bekannt setzen wir die folgenden Umformungen voraus:

$e^{\ln(f(x))} = f(x)$	$e^{f(x)+c} = e^{f(x)} \cdot e^c$	$e^{\ln(f(x))+c} = f(x) \cdot e^c \;\widehat{=}\; f(x) \cdot \widetilde{c}$
$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + c$		(einfache Substitution)
$\int f(x) \cdot g(x) dx$	$= F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx$	(Partielle Intergation)

In den Aufgaben ist y stets die gesuchte Funktion (mit x als Variablen), d.h. gesucht wird stets die Funktion $y(x)$, die die gegebene Gleichung erfüllt.

1 Trennung der Variablen

Aufgabe 1.1 Lösen Sie die folgenden Differential-Gleichungen mittels "Trennung der Variablen" :

a) $y' = -\frac{x}{y}$ mit $y \neq 0$ b) $y' = \frac{2x}{e^y}$ c) $y'(x^2+1) - 2xy = 0$

Aufgabe 1.2 Substituieren Sie in der folgenenden Differentialgleichung $z = x + y$. Lösen Sie die entstehende Gleichung dann mittels "Trennung der Variablen".

$$y' + 1 = \frac{1}{x+y}$$

2 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Aufgabe 2.1 (Homogen): Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen:

a) $y' - y = 0$ b) $y'' - y = 0$ c) $y''' - y = 0$

d) $y'' - 2y' + y = 0$ e) $y'' - 6y' + 9y = 0$ f) $y''' - y' = 0$

Aufgabe 2.2 (Inhomogene Differentialgleichungen): Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen:

a) $y' - y = 2$ b) $y'' - y = x^2$ c) $y''' - y = e^{-x}$

Verwenden Sie dazu die homogenen Lösungen aus Aufgabe 2.1 a) bis c). Bestimmen Sie dann die partikuläre Lösung bei a) & b) mit einem Polynom-Ansatz, bei c) mittels eines Ansatzes mit e^{-x}.

Aufgabe 2.3 (Anfangswertproblem): Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem

a) $y' - y = 2$ mit $y(0) = 1$
b) $y'' - y = x^2$ mit $y(0) = 2$
c) $y''' - y = e^{-x}$ mit $y(0) = 3$

Verwenden Sie dazu die Lösungen aus Aufgabe 2.2 a) bis c).

3 Allgemeine lineare Differentialgleichungen

Aufgabe 3.1 (lineare Differentialgleichungen mit nicht konstanten Koeffizienten): Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen:

a) $y' - (2x+1)y = 2x+1$ b) $y' + \frac{1}{2x}y = \sqrt{x}$ für den Bereich $x > 0$.

Verwenden Sie für die homogene Lösung den Ansatz "Trennung der Variablen" und für die partikuläre Lösung den Ansatz "Variation der Konstanten".

4 Lösungen

Lösung für Aufgabe 1.1

a)

$$\begin{aligned} y'(x) = -\tfrac{x}{y(x)} \quad &\Leftrightarrow \quad y(x)\cdot y'(x) = -x \\ &\Leftrightarrow \quad \textstyle\int y(x)\cdot y'(x)\,\mathrm{d}x = -\int x\,\mathrm{d}x \\ &\Leftrightarrow \quad \tfrac{y(x)^2}{2} = -\tfrac{x^2}{2} + c \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{y(x) = \pm\sqrt{-x^2+2c}} \end{aligned}$$

Zur Lösung: Die Funktion $\sqrt{-x^2}$ (für $c = 0$) macht als reelle Funktion nicht viel Sinn, man kann sie nur am Punkt $x = 0$ auswerten, ansonsten ergibt sich eine komplexe Zahl. Genauer gesagt gilt: $\sqrt{-x^2} = |x| \cdot i$, wobei der Betrag daraus resultiert, dass für negative Zahlen wie beispielsweise -3 das folgende gilt: $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$.
Gilt jedoch $c > 0$, so ist die Funktion $\sqrt{2c - x^2}$ auf dem Intervall $[-\sqrt{2c}, \sqrt{2c}]$ definiert und der Graph der Funktion beschreibt einen Kreisbogen mit Radius $\sqrt{2c}$.

b)

$$\begin{aligned} y' = \tfrac{2x}{e^y} \quad &\Leftrightarrow \quad e^y \cdot y' = 2x \\ &\Leftrightarrow \quad \textstyle\int e^{y(x)}\cdot y'(x)\mathrm{d}x = \int 2x\,\mathrm{d}x \\ &\Leftrightarrow \quad e^{y(x)} = x^2 + c \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{y = \ln(x^2+c)} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} y'(x^2+1) - 2xy = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{y}\cdot y' = \frac{2x}{x^2+1} \\ &\Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{y(x)}\cdot y'(x)\,\mathrm{d}x = \int 2x \cdot \frac{1}{(x^2+1)}\,\mathrm{d}x \\ &\Leftrightarrow \quad \ln(y) = \ln(x^2+1) + c \\ &\Leftrightarrow \quad \boxed{y = (x^2+1)\cdot e^c} \end{aligned}$$

Für die letzte Umformung in c) benutzt man:
$\ln(x^2 + 1) + c = \ln(x^2 + 1) + \ln(e^c) = \ln((x^2 + 1) \cdot e^c)$.

Lösung für Aufgabe 1.2

In $y' + 1 = \frac{1}{x+y}$ soll $z = x + y$ substituiert werden. Man beachte: Da das gesuchte y eigentlich eine Funktion in x ist (also $y(x)$), ist z ebenso eine Funktion in x, nämlich $z(x) = y(x) + x$. Entprechend erhält man die Gleichungen $y(x) = z(x) - x$ und $y'(x) = z'(x) + 1$, die y und z sowie y' und z' in ein Verhältnis setzen.

In kurz ergibt sich also das Folgende:

Nebenrechnung:

$$\begin{array}{r|l} z = x + y & \\ y = z - x & y' = z' - 1 \end{array}$$

Es folgt:

$$y' + 1 = \frac{1}{x+y} \quad \Leftrightarrow \quad z' - 1 + 1 = \frac{1}{x + z - x} \quad \Leftrightarrow \quad z' = \frac{1}{z} \quad \Leftrightarrow \quad z \cdot z' = 1$$

Die letzte Differentialgleichung in z lösen wir nun per Trennung der Variablen:

$$z \cdot z' = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \int z\,\mathrm{d}z = \int 1\,\mathrm{d}x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z^2}{2} = x + c \quad \Leftrightarrow \quad z = \pm\sqrt{2x+2c}$$

Um nun wieder eine Lösung für y zu erhalten, benutzen wir unser Wissen $y = z - x$ aus der Nebenrechnung beim *Resubstituieren*. Man erhält: $\boxed{y = \pm\sqrt{2x+2c} - x}$.

Lösung für Aufgabe 2.1

	zu Lösen	zugehörige Gleichung	Lösung
a)	$y' - y = 0$	$\lambda^1 - \lambda^0 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = 1$	$y(x) = c_1 e^x$
b)	$y'' - y = 0$	$\lambda^2 - \lambda^0 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda^2 - 1 = 0$ $\Leftrightarrow\; \lambda \in \{-1, 1\}$	$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x$
c)	$y''' - y = 0$	$\lambda^3 - \lambda^0 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda^3 - 1 = 0$ $\Leftrightarrow\; \lambda \in \{1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$	$y(x) = c_1 e^x + c_2 \cos(\frac{-1}{2}x) + c_3 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$
d)	$y'' - 2y' + y = 0$	$\lambda^2 - 2\lambda^1 + \lambda^0 = 0 \;\Leftrightarrow\; (\lambda - 1)^2 = 0$ $\Leftrightarrow\; \underbrace{\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1}_{\text{doppelte Nullstelle!}}$	$y(x) = c_1 e^{1x} + c_2\, x e^{1x}$
e)	$y'' - 6y' + 9y = 0$	$\lambda^2 - 6\lambda^1 + 9\lambda^0 = 0 \;\Leftrightarrow\; (\lambda - 3)^2 = 0$ $\Leftrightarrow\; \underbrace{\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 3}_{\text{doppelte Nullstelle!}}$	$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2\, x e^{3x}$
f)	$y''' - y' = 0$	$\lambda^3 - \lambda^1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda(\lambda^2 - 1)^2 = 0$ $\Leftrightarrow\; \lambda \in \{0, -1, 1\}$	$y(x) = c_1 e^0 + c_2 e^{-x} + c_3 e^x$ $= c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^x$

Lösung für Aufgabe 2.2

Aufg. 2.2 a) Zu lösen ist: $y' - y = 2$. Der Grad des Polynoms "2" auf der rechten Seite ist 0, entsprechend nutzen wir einen Polynomansatz vom Grad 0:

$$\textbf{Ansatz:}\quad \begin{aligned} y_p(x) &= 2 \\ y_p'(x) &= 0 \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$y_p'(x) - y_p(x) = 0 - a_0 \overset{!}{=} 2 \quad\Leftrightarrow\quad a_0 = 2\,.$$

Lösung: Entsprechend ist $y_p(x) = 2$ die partikuläre Lösung der Differnetialgleichung. Die Homogene Lösung lautet $y_h = c_1\, e^x$ (s. Aufgabe 2.1) und damit lautet die allgemeine Lösung der DGL: $y(x) = 2 + c_1\, e^x$

Aufg. 2.2 b) Zu lösen ist: $y'' - y = x^2$. Der Grad des Polynoms "x^2" auf der rechten Seite ist 2, entsprechend nutzen wir einen Polynomansatz vom Grad 2:

$$\textbf{Ansatz:}\quad \begin{aligned} y_p(x) &= a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ y_p'(x) &= 2a_2x + a_1 \\ y_p''(x) &= 2a_2 \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$y_p''(x) - y_p(x) = 2a_2 - (a_2x^2 + a_1x + a_0) = -a_2x^2 - a_1x - a_0 + 2a_2 \overset{!}{=} x^2 \tag{1}$$

Gleichungen: Der Gleichung (1) entnehmen wir die drei gültigen Gleichungen für x^2, x^1 und x^0:

$$\left.\begin{aligned} -a_2 &= 1 \quad (\text{ Gleichung für } x^2) \\ -a_1 &= 0 \quad (\text{ Gleichung für } x^1) \\ -a_0 + 2a_2 &= 0 \quad (\text{ Gleichung für } x^0) \end{aligned}\right\} \quad\Leftrightarrow\quad a_2 = -1,\ a_1 = 0,\ a_2 = a_0/2 = -1/2.$$

Lösung Entsprechend ist

$$y_p(x) = (-1)\cdot x^2 + (0)\cdot x + -\frac{1}{2}\cdot 1 = -x^2 - \frac{1}{2}$$

die partikuläre Lösung der Differnetialgleichung. Die Homogene Lösung lautet $y_h = c_1\, e^x + c_2\, e^{-x}$ (s. Aufgabe 2.1) und damit lautet die allgemeine Lösung der DGL:

$$y(x) = -x^2 - \frac{1}{2} + c_1\, e^x + c_2\, e^{-x}$$

Aufg. 2.2 c) Zu lösen ist: $y''' - y = e^{-x}$. Die Rechte Seite lautet $1 \cdot e^{-x}$, wir verwenden hier als Ansatz also ein Polynom, das mit e^{-x} multipliziert wird. Der Grad des Polynoms "1", mit dem e^{-x} multipliziert wurde ist 0, entsprechend nutzen wir einen Polynomansatz vom Grad 0:

$$\textbf{Ansatz:} \quad \begin{array}{rcll} y_p(x) &=& a_0 e^{-x} & \\ y_p'(x) &=& -a_0 x & e^{-x} \\ y_p''(x) &=& a_0 x & e^{-x} \\ y_p'''(x) &=& -a_0 x & e^{-x} \end{array}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$y_p'''(x) - y_p(x) = -a_0 e^{-x} - a_0 e^{-x} \overset{!}{=} e^{-x} \tag{2}$$

Gleichungen: Der Gleichung (2) entnehmen wir $2a_0 = 1$.
Lösung Entsprechend ist

$$y_p(x) = -\frac{1}{2} e^{-x}$$

die partikuläre Lösung der Differnetialgleichung. Die Homogene Lösung lautet $y_h = c_1 e^x + c_2 \cos(\frac{-1}{2}x) + c_3 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$ (s. Aufgabe 2.1) und damit lautet die allgemeine Lösung der DGL:

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} \; + c_1 e^x + c_2 \cos(\frac{-1}{2}x) + c_3 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x).$$

Lösung für Aufgabe 2.3

Aufg 2.3 a) Zu lösen ist: $y' - y = 2$ mit $y(0) = 1$. Die allgemeine Lösung der DGL lautet (s. Aufgabe 2.2): $y_{allg}(x) = 2 + c_1\, e^x$ mit Einsetzen des Anfangspunktes $x = 0$ erhält man:

$$y_{allg}(0) = 2 + c_1\, e^0 = 2 + c_1 \overset{!}{=} 1 \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = 1 - 2 = -1$$

Die Lösung des Anfangswertes lautet also: $\boxed{y(x) = 2 - e^x}$.

Aufg 2.3 b) Zu lösen ist: $y'' - y = x^2$ mit $y(0) = 2$. Die allgemeine Lösung der DGL lautet (s. Aufgabe 2.2):

$$y_{allg}(x) = -x^2 - \frac{1}{2} \; + c_1\, e^x + c_2\, e^{-x}$$

mit Einsetzen des Anfangspunktes $x = 0$ erhält man:

$$y_{allg}(0) = 0 - \frac{1}{2} + c_1 + c_2 \overset{!}{=} 2 \quad \Leftrightarrow \quad c_2 = \frac{5}{2} - c_1$$

Die Lösung des Anfangswertes lautet also: $\boxed{y(x) = -x^2 - \frac{1}{2} \; + c_1\, e^x + (\frac{5}{2} - c_1)\, e^{-x}}$.

Alternative Lösung: Löst man die Gleichung $y_{allg}(0) = 2$ nach c_1 auf, so erhält man $c_1 = \frac{5}{2} - c_2$. Die hierzugehörige Lösung $y(x) = -x^2 - \frac{1}{2} \; + (\frac{5}{2} - c_2)\, e^x + c_2\, e^{-x}$ ist auch richtig und identisch zur ersten Lösung, denn die Mengen an möglichen koeffizienten sind gleich:

$$\{(c_1, \frac{5}{2} - c_1 \;:\; c_1 \in \mathbb{R}\} = \{(\frac{5}{2} - c_2, c_2) \;:\; c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Für $c_1 = 1$ erhält man beispielsweise $(1, \frac{3}{2})$ in der ersten Menge. Und für $c_2 = \frac{3}{2}$ erält man das gleichen Koeffizientenpaar: $(\frac{5-3}{2}, \frac{3}{2}) = (1, \frac{3}{2})$.

Aufg 2.3 c) Zu lösen ist $y''' - y = e^{-x}$ mit $y(0) = 3$ Die allgemeine Lösung der DGL lautet (s. Aufgabe 2.2):

$$y_{allg}(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} \; + c_1 e^x + c_2 \cos(\frac{-1}{2}x) + c_3 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

mit Einsetzen des Anfangspunktes $x = 0$ erhält man:

$$y_{allg}(0) = -\frac{1}{2} \; + c_1 + c_2 \cos(0) + c_3 \sin(0) \overset{!}{=} 3 \quad \Leftrightarrow \quad c_2 = \frac{7}{2} - c_1$$

Die Lösung des Anfangswertes lautet also:

$$\boxed{y(x) = -\tfrac{1}{2}e^{-x} \; + c_1 e^x + (\tfrac{7}{2} - c_1) \cos(\tfrac{-1}{2}x) + c_3 \sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x)}$$

Hätte man nach c_2 aufgelöst ergäbe sich: $y(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} \; + (\frac{7}{2} - c_2)e^x + c_2 \cos(\frac{-1}{2}x) + c_3 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$. Beide Lösungen sind richtig und in dem Sinne äquivalent, dass sich jeweils die gleichen Koeffizienten ergeben, wenn man in die Zweite Lösung $c_2 = (\frac{7}{2} - c_1)$ einsetzt.

Lösung für Aufgabe 3.1
Aufg 3.1 a) Zu lösen ist: $y' - (2x+1)y = 2x+1$
Lösen der homogenen Gleichung mit Trennung der Variablen:

$$y' - (2x+1)\cdot y = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{y}\cdot y' = (2x+1) \quad\Leftrightarrow\quad \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \int 2x+1\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow\quad \ln(y) = x^2+x+d \quad\Leftrightarrow\quad y = \underbrace{e^d}_{=c} \cdot e^{x^2+x}$$

Die Lösung der homogenen Gleichung lautet also $\boxed{y_h(x) = c\cdot e^{x^2+x}}$.
Für die Bestimmung der partikulären Lösung verwenden wir das Verfahren der“Variation der Konstanten”, d.h. wir ersetzen die Konstante c der Lösung der homogenen DGL durch eine Funktion $c(x)$. Die neugewonnene Funktion benutzen wir als Ansatz und setzen sie in die DGL ein:

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{Ansatz:} & y_p(x) & = & c(x)e^{x^2+x} \\ & y_p'(x) & = & c'(x)e^{x^2+x} + c(x)(2x+1)e^{x^2+x} \end{array}$$

Wir eralten beim Einsetzen in die linke Seite der DGL:

$$y_p'(x) - (2x+1)\cdot y_p(x) \;=\; c'(x)e^{x^2+x} + c(x)(2x+1)e^{x^2+x} - (2x+1)\cdot c(x)e^{x^2+x} = c'(x)e^{x^2+x}$$

Die DGL sieht mit diesem Ansatz also wie folgt aus:

$$y_p'(x) - (2x+1)y_p(x) = 2x+1 \quad\Leftrightarrow\quad c'(x)e^{x^2+x} = 2x+1 \quad\Leftrightarrow\quad c'(x) = (2x+1)\cdot e^{-(x^2+x)}$$

Integration auf beiden Seiten der letzten Gleichung nach x liefert $c(x)$:

$$c(x) = \int (2x+1)\cdot e^{-(x^2+x)}\mathrm{d}x = -e^{-(x^2+x)}$$

Wir erhalten also als Lösung

$$y_p(x) = c(x)e^{x^2+x} = \left(-e^{-(x^2+x)}\right)e^{x^2+x} = -1$$

Und in der Tat löst die Funktion $y_p(x) = -1$ die Differentialgleichung (die Probe ist erschreckend einfach). Die Gesamtlösung lautet also:

$$\boxed{y_{allg}(x) = -1 + c\cdot e^{x^2+x}}$$

Aufg 3.1 b) Zu lösen ist: $y' + \frac{y}{2x} = \sqrt{x}$ (wobei $x > 0$ gilt).
Lösen der homogenen Gleichung mit Trennung der Variablen:

$$y' + \frac{y}{2x} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{y}\cdot y' = -\frac{1}{2x} \quad\Leftrightarrow\quad \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow\quad \ln(y) = -\frac{1}{2}\ln(x) + \underbrace{d}_{=\ln(c)} = \ln(c\cdot x^{-\frac{1}{2}}) \quad\Leftrightarrow\quad y = c\cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

Die Lösung der homogenen Gleichung lautet also $\boxed{y_h(x) = c\cdot x^{-\frac{1}{2}}}$.
Für die Bestimmung der partikulären Lösung verwenden wir das Verfahren der“Variation der Konstanten”, d.h. wir ersetzen die Konstante c der Lösung der homogenen DGL durch eine Funktion $c(x)$. Die neugewonnene Funktion benutzen wir als Ansatz und setzen sie in die DGL ein:

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{Ansatz:} & y_p(x) & = & c(x)x^{-\frac{1}{2}} \\ & y_p'(x) & = & c'(x)x^{-\frac{1}{2}} + c(x)\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right) \end{array}$$

Wir eralten beim Einsetzen in die linke Seite der DGL:

$$y_p'(x) + \cdot\frac{y_p(x)}{2x} \;=\; c'(x)x^{-\frac{1}{2}} + c(x)\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right) + \frac{c(x)x^{-\frac{1}{2}}}{2x} = c'(x)x^{-\frac{1}{2}}$$

Die DGL sieht mit diesem Ansatz also wie folgt aus:

$$y_p'(x) + \frac{y_p(x)}{2x} = x^{-\frac{1}{2}} \quad\Leftrightarrow\quad c'(x)x^{-\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} \quad\Leftrightarrow\quad c'(x) = x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}} = x$$

Integration auf beiden Seiten der letzten Gleichung nach x liefert $c(x)$:

$$c(x) = \int x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}$$

Wir erhalten also als Lösung

$$y_p(x) = c(x)x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$$

Die Gesamtlösung lautet also:

$$\boxed{y_{allg}(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} \ + c \cdot x^{-\frac{1}{2}}}$$