

## Übung 5

Abgabe bis Freitag, 26.05.

### Aufgabe 1: [Martingalansatz]

Bestimmen sie mit Hilfe des Martingalansatzes den Preis  $V(S, 0)$  der folgenden beiden Digitalen Optionen unter dem Black-Scholes Modell:

- (a) **Cash-or-Nothing Call** mit Auszahlungsfunktion

$$V(S, T) = \begin{cases} 1 & \text{falls } S(T) \geq K, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (b) **Asset-or-Nothing Call** mit Auszahlungsfunktion

$$V(S, T) = \begin{cases} S(T) & \text{falls } S(T) \geq K, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Punkte: 10

### Aufgabe 2: [Europäischer Put]

Bestimmen sie eine geschlossene Lösungsformel für den Preis  $V(S, 0)$  einer Europäischen Put-Option im Black-Scholes Modell.

- (a) Verwenden Sie dafür die Black-Scholes Formel für den Europäischen Call und die Put-Call-Parität.  
 (b) Leiten Sie die Lösungsformel mit Hilfe des Martingalansatzes her

Punkte: 10

### Aufgabe 3: [Greeks]

Zeigen sie mittels der Black-Scholes Formel für Europäische Call-Optionen, dass für das  $\Delta$  (Delta),  $\Gamma$  (Gamma) und  $\Theta$  (Theta) dieser Option gilt:

- (a)

$$\Delta = \Phi(d_1)$$

- (b)

$$\Gamma = \frac{\Phi'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$$

- (c)

$$\Theta = -\frac{S_0 \Phi'(d_1) \sigma}{2\sqrt{T}} - rK e^{-rT} \Phi(d_2)$$

mit  $d_1$  und  $d_2$  aus der Black-Scholes-Formel.

Punkte: 15

### Aufgabe 4:

Zeigen sie, dass für die Greeks  $\Theta$  (Theta),  $\Delta$  (Delta) und  $\Gamma$  (Gamma) beliebiger Optionen eines Portfolios  $\Pi$  im Black-Scholes-Modell folgende Beziehung gilt:

$$\Theta + rS\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma = r\Pi,$$

wobei  $r$  dem risikolosen Zins und  $S$  dem unterliegenden Basiswert entspricht.

Punkte: 5

**Gesamtpunktzahl: 40 Punkte**