

Übung 8

Abgabe bis Freitag, 16.6.

Aufgabe 1: [Monte Carlo Methode]

Mit der Monte Carlo Methode lässt sich ein Integral auf folgende Weise schätzen

$$\int_{[0,1]^d} g(x) dx \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x_i),$$

wobei $x_i \sim U[0, 1]^d$, also gleichverteilt auf $[0, 1]^d$ sind.

Sei $V(S, 0)$ der heutige Preis einer asiatischen Call-Option mit geometrischem Mittel über zwei Zeitpunkte, das heißt

$$V(S, T) = (\sqrt{S(T/2) \cdot S(T)} - K)^+.$$

.

(a) Bestimmen sie die Funktionen $f(x, y)$ und $g(x, y)$ für die gilt

$$V(S, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy$$

sowie

$$V(S, 0) = \int_0^1 \int_0^1 g(x, y) dx dy.$$

und geben Sie den Monte Carlo Schätzer für das letzte Integral an.

(b) Leiten Sie mit Hilfe des Integrals aus a) eine geschlossene Lösungsformel für diese Option her.

Punkte: 16

Aufgabe 2: [Varianz]

Der Fehler einer Monte-Carlo-Simulation lässt sich über die Varianz der berechneten Ergebnisse abschätzen. Ein Schätzer für die Varianz von M Zahlen x_1, \dots, x_M ist

$$s_M^2 := \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (x_i - \bar{x})^2, \quad \text{mit } \bar{x} := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i$$

oder alternativ

$$s_M^2 := \frac{1}{M-1} \left(\sum_{i=1}^M x_i^2 - \frac{1}{M} \left(\sum_{i=1}^M x_i \right)^2 \right).$$

Es kann auch der folgende rekursive Algorithmus verwendet werden:

$$\alpha_1 := x_1, \beta_1 := 0$$

für $i = 2, \dots, M$:

$$\alpha_i := \alpha_{i-1} + \frac{x_i - \alpha_{i-1}}{i}$$

$$\beta_i := \beta_{i-1} + \frac{(i-1)(x_i - \alpha_{i-1})^2}{i}$$

Zeige sie, dass gilt: $\bar{x} = \alpha_M$ und $s_M^2 = \frac{\beta_M}{M-1}$.

Punkte: 8