

Skript zur Vorlesung

Modulformen (2std.)

Sommersemester 2017

Prof. Dr. Martin Möller

Frankfurt am Main, 17. Juli 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
2	Elliptische Funktionen	4
2.1	Gitter	4
2.2	Meromorphe Funktionen und ihre Perioden	7
2.3	Elliptische Funktionen	10
2.4	Die Abhängigkeit vom Gitter	16
2.5	Fourierentwicklungen	18
2.6	Exkurs: Kongruenzen und Koeffizientenwachstum	22
3	Modulformen	23
3.1	Möbiustransformation und die Modulgruppe $SL_2(\mathbb{Z})$	24
3.2	Einschub: Holomorphe Funktionen auf Kreisringen	28
3.3	Meromorphe Modulformen	30
4	Quasimodulformen	37
4.1	Eisensteinreihen in Gewicht 2	38
4.2	Der Ring der Quasimodulformen	40
4.3	Das Wachstumspolynom	43
5	Theta-Funktionen	46
	Literatur	54
	Stichwortverzeichnis	55

Vorwort

Dies ist ein Skript zu einer Vorlesung „Modulformen“ in Frankfurt/Main im Sommersemester 2013 und im Sommersemester 2017. Sie baut auf einer Vorlesung „Funktionentheorie und Differentialgleichungen“ auf, in der grundlegende Begriffe der Funktionentheorie bis hin zur Cauchy-Integralformel eingeführt wurden.

Quellen und Literatur: Modulformen haben Verbindungen von der Zahlentheorie bis zur Analysis. Dementsprechend vielfältig sind die Standpunkte und Schwerpunkte der Literatur. Diese Vorlesung wurde zumeist folgenden Büchern entnommen:

[KK07] M. Köcher, A. Krieg „Elliptische Funktionen und Modulformen“ (Springer)

[Zag08] D. Zagier: „Elliptic Modular Forms and Their Applications“, in: „1-2-3 of Modular Forms“ (Springer)

Hintergrund zur Funktionentheorie zusammen mit einigen Kapiteln über Modulformen findet man in

[FB09] E. Freitag, R. Busam: „Complex Analysis“ (Springer)

Weitere Literatur und die genauen Quellen für Aussagen, die ohne Beweis verwendet wurden, finden sich im Literaturverzeichnis am Ende.

1 Einführung

Eine Modulform ist eine holomorphe Abbildung $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ auf der oberen Halbebene, die der Transformationsregel

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k \cdot f(\tau) \quad \text{für alle} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

für alle $\tau \in \mathbb{H}$ und für ein $k \in \mathbb{N}$ (das Gewicht der Modulform) und einer Wachstumsbedingung für $\tau \rightarrow \infty$ genügt. Diese Transformationsregel ist prägnant genug und der Vektorraum der Modulformen reichhaltig genug, dass viele Quellen direkt mit dieser Definition beginnen. Wir wollen hier kurz die Geschichte und die Fragen „Wieso für alle Elemente von $SL_2(\mathbb{Z})$ “ und „Wieso so ein Transformationsverhalten“ kurz skizzieren.

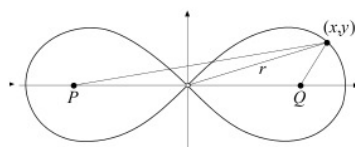
Die Bestimmung der Bogenlänge eines Kreises $x^2 + y^2 = 1$ in Abhängigkeit der x -Koordinate führt auf die Bestimmung des Integrals

$$B(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Dieses Integral lernt man in den Anfängervorlesungen zu Integrationstheorie zu „lösen“, die Lösung ist der Arcuscosinus. Aber welcher Art ist die Lösung oder ihre Umkehrfunktion, der Kosinus, und sein Bruder, der Sinus? Anders als bei Integralen von Polynomen sind beides Potenzreihen (wie eine beliebige holomorphe Funktion) und sogar schnell konvergent, also gut näherungsweise auswertbar. Der Sinus (und Kosinus) ist aber vor allem deswegen so gut untersucht, da er und damit auch $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ *periodisch* ist. In einer komplexen Variablen aufgefasst, erfüllt $e(\tau) := e^{2\pi i \tau}$ die Periodizität $e(\tau + 1) = e(\tau)$. Fagnano wollte im 18. Jahrhundert die Bogenlänge des *Lemniskate*, die Menge aller Punkte $z = x + iy \in \mathbb{R}^2$ mit

$$|z - p| \cdot |z - q| = \frac{1}{4} |p - q|^2$$

zu zwei vorgegebenen Punkten p und q lösen.



Nach geeigneter Normalisierung ($p = \sqrt{2}, q = -\sqrt{2}$) erhält man als Bogenlänge des Viertelbogens im 1. Quadranten $\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$. Dieses Integral widersetzt sich elementarer Integrati-

onstechniken. Betrachten wir also allgemein die Funktion

$$F(z) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}},$$

für $|z| < 1$, wobei der Integrationsweg in der Einheitskreisscheibe verläuft. Da $|F'(z)| \neq 0$ existiert (zumindest in einer Umgebung von Null) eine Umkehrfunktion G , die wir mit der komplexifizierten Umkehrfunktion für den Fall des Kreises, also der Exponentialfunktion, vergleichen wollen.

In der Tat konnte Euler (und Fagnano schon für $x = y$) das Additionstheorem

$$F(x) + F(y) = F\left(\frac{x\sqrt{1-y^4} + y\sqrt{1-x^4}}{1+x^2y^2}\right)$$

zeigen, welches für die Umkehrfunktion

$$G(u+v) = \frac{G(u)G'(v) + G(v)G'(u)}{1+G^2(u)G^2(v)}$$

impliziert. Da der Integrand $\frac{1}{\sqrt{1-t^4}}$ durch die Substitution $t \mapsto i \cdot t$ unverändert bleibt, gilt $G(iu) = iG(u)$. Nach dem Satz über die Ableitung von Umkehrfunktionen gilt $G'^2 = 1 - G^4$. Zusammengefasst ergibt sich, dass für ein $v_0 \in \mathbb{C}$ mit $G'(v_0) = 1$ gilt

$$G(u+v_0) = G(u) \quad \text{und} \quad G(u+iv_0) = G(u).$$

Sobald die Existenz eines solchen v_0 gesichert ist, folgt, dass G *doppelt periodisch* (oder translationsinvariant unter einem *Gitter*) ist. Solche Funktionen werden auch *elliptische Funktionen* genannt.

Aufgabe 1.1 (4 Punkte)

Zeige den *Additionssatz von Fagnano* für F , d.h. in einer kleinen Umgebung von 0 gilt

$$2F(z) = F\left(2z \frac{\sqrt{1-z^4}}{1+z^4}\right).$$

Hinweis: Was bewirkt die Substitution

$$t^2 = \frac{2s^2}{1+s^4}$$

in der Integralfunktion F ?

Zeige anschließend: F ist lokal um 0 invertierbar und für die Umkehrfunktion G gilt

$$G(2u) = \frac{2G(u)G'(u)}{1+G(u)^4}$$

in einer kleinen Umgebung von 0.

Unser erstes Ziel wird sein, Gitter in \mathbb{R}^2 (oder in \mathbb{C}) zu klassifizieren, als Äquivalenzklassen von Punkten in \mathbb{H} nach einer Gruppenoperation von $SL_2(\mathbb{Z})$. Damit haben wir zwei Mitspieler in der Definition von Modulformen identifiziert. Nächstes Ziel ist die (nicht ganz einfache) Konstruktion einer elliptischen Funktion, welche unter einem vorgegebenen Gitter periodisch ist.

Modulformen vom Gewicht $k = 0$ sind also holomorphe Funktionen auf der Menge aller Gitter. Diese Menge hat viel mehr strukturelle Eigenschaften, man spricht vom „Raum der Gitter“ oder „Modulraum der Gitter“. Diese Begriffsbildung werden wir im Rahmen der Vorlesung nicht erklären können, zumindest erklärt dies die Herkunft des ersten Wortteils des Vorlesungstitels.

Leider (!) ist der Vektorraum der Modulformen vom Gewicht $k = 0$ vollkommen langweilig: Wir werden sehen, dass er nur aus den konstanten Funktionen besteht. Funktionen mit dem eingangs beschriebenen Transformationsverhalten (d.h. Modulformen beliebigen Gewichts) sind der bestmögliche Ersatz in Anbetracht des Fehlen interessanter Funktionen. Warum gerade dieses Transformationsverhalten das Richtige ist, ist ohne Vorkenntnisse z.B. über Differentialformen nicht leicht zu motivieren. Die verblüffenden Eigenschaften der Koeffizienten von Modulformen (d.h. ihrer Fourier-Entwicklungen) geben der Definition „recht“.

2 Elliptische Funktionen

2.1 Gitter

Eine Teilmenge Λ eines reellen Vektorraums V mit $\dim V \geq 1$ heißt *Gitter*, falls es eine \mathbb{R} -Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ von V gibt, sodass $\Lambda = \mathbb{Z}b_1 + \mathbb{Z}b_2 + \dots + \mathbb{Z}b_n$. Eine solche Basis von V wird *Gitterbasis* von Λ genannt.

In Anbetracht der Anwendung auf elliptische Funktionen fokussieren wir uns auf Gitter Λ im zweidimensionalen \mathbb{R} -Vektorraum \mathbb{C} .

Lemma 2.1 Sei $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter, $\{b_1, b_2\}$ eine Basis von Λ und $b'_1, b'_2 \in \mathbb{C}$. Dann sind $\{b'_1, b'_2\}$ eine Basis von Λ genau dann, wenn es $U \in GL_2(\mathbb{Z})$ gibt mit

$$\begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Beweis : Da $b'_1, b'_2 \in \Lambda$, sind diese ganzzahlige Linearkombinationen von b_1 und b_2 . Als Basiswechselmatrix liegt U in $GL_2(\mathbb{Z})$ und zusammen folgt die Behauptung. \square

Die Menge

$$F(b_1, b_2) = \{V \ni x = a_1 b_1 + a_2 b_2 : 0 \leq a_1 < 1, 0 \leq a_2 < 1\}$$

wird *Fundamentalmasche* des Gitters zur Gitterbasis $\{b_1, b_2\}$ genannt. Offenbar gibt es zu jedem $v \in V$ genau einen Punkt $x \in F(b_1, b_2)$ mit $x - v \in \Lambda$. Das euklidische Volumen der Fundamentalmasche ist

$$\text{vol}(F(b_1, b_2)) = \left| \det \begin{vmatrix} \text{Re } b_1 & \text{Im } b_1 \\ \text{Re } b_2 & \text{Im } b_2 \end{vmatrix} \right| = |\text{Im}(b_1 \bar{b}_2)|.$$

Proposition 2.2 *Das Volumen der Fundamentalmasche ist unabhängig von der Basiswahl und wird Covolumen des Gitters genannt.*

Beweis : Ist $\{b'_1, b'_2\}$ eine weitere Basis und $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die Basiswechselmatrix, so gilt

$$\begin{aligned} |\text{Im}(b'_1 \bar{b}'_2)| &= |\text{Im}((ab_1 + bb_2)(\overline{cb_1 + db_2}))| \\ &= |\text{Im}(adb_1 \bar{b}_2 + bcb_2 \bar{b}_1)| \\ &= |ad - bc| |\text{Im}(b_1 \bar{b}_2)| \\ &= |\text{Im}(b_1 \bar{b}_2)|, \end{aligned}$$

da $\det U \in \{\pm 1\}$. □

Aufgabe 2.1 (3 Punkte)

Sei $\Lambda = \mathbb{Z}b_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}b_n \subset \mathbb{R}^n$ ein Gitter in \mathbb{R}^n .

- i) Beweisen Sie, dass das euklidische Volumen der Fundamentalmasche $F(b_1, \dots, b_n) = \{x = \sum_{i=1}^n a_i b_i \in V : 0 \leq a_i \leq 1\}$ durch

$$\text{vol}(F(b_1, \dots, b_n)) = |\det([b_1 | \dots | b_n])|$$

gegeben ist. Hierbei sei das euklidische Volumen durch $\text{vol}([0, 1]^n) = 1$ normalisiert.

- ii) Beweisen Sie, dass das Volumen der Fundamentalmasche unabhängig von der Gitter-Basiswahl ist.

Proposition 2.3 *Ein Gitter $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ ist abgeschlossen und diskret.*

Beweis : Wir zeigen für einen beliebigen Radius ρ , dass der Schnitt von Λ mit dem Ball $B_\rho(0)$ endlich ist. Ist $\{b_1, b_2\}$ eine Gitterbasis, so ersetzen wir Λ durch das Gitter $\tilde{\Lambda} = \{\lambda/b_1, \lambda \in \Lambda\}$. Dabei werden Bälle um Null in ebensolche überführt und wir können annehmen, dass $b_1 = 1 \in \mathbb{C}$ Teil einer Gitterbasis ist. Ist nun $mb_1 + nb_2 \in \Lambda \cap B_\rho(0)$, und $b_2 = s + it$, $s, t \in \mathbb{R}$, so ist $\rho^2 \geq (m + ns)^2 + (nt)^2$. Da $t \neq 0$ gibt es zu festem ρ nur endlich viele Möglichkeiten für n und für festes n gibt es nur endlich viele m mit $(m + ns)^2 \leq \rho^2$. □

In der Tat gilt ganz allgemein, dass $\Lambda \subseteq V$ mit $\dim V = n$ genau dann ein Gitter ist, falls Λ eine freie abelsche Gruppe vom Rang n und diskret ist. Wir benötigen den Satz hier nicht und bleiben bei $\dim V = 2$.

Wir bezeichnen mit $F_u(b_1, b_2) = \{u + v : v \in F(b_1, b_2)\}$ die um u verschobene Fundamentalmasche. Ziel des nächsten Satzes ist die Anzahl der Punkte in $B_\rho(0)$ genauer abzuschätzen. Sei dazu

$$\delta = \delta(b_1, b_2) = \sup\{|z_1 - z_2|, z_1, z_2 \in F(b_1, b_2)\}$$

der Durchmesser der Fundamentalmasche.

Satz 2.4 Für alle $\rho > \delta$ gilt für $A_\rho(\Lambda) := \#(B_\rho(0) \cap \Lambda)$ die Abschätzung

$$\frac{\pi}{\text{vol}(\Lambda)}(\rho - \delta)^2 \leq A_\rho(\Lambda) \leq \frac{\pi}{\text{vol}(\Lambda)}(\rho + \delta)^2.$$

Beweis : Wir pflastern die Bälle $B_\rho(0)$ mit Translaten von Fundamentalmaschen. Sei dazu

$$M_\rho = \bigcup_{u \in \Lambda \cap B_\rho(0)} F_u(b_1, b_2).$$

Dann gilt $B_{\rho-\delta}(0) \subseteq M_\rho \subseteq B_{\rho+\delta}(0)$ und die Formel folgt nach Übergang zum Volumen dieser Mengen. \square

Als Konsequenz davon erhalten wir ein Konvergenzlemma, das nützlich sein wird, wenn wir gitterperiodische Funktionen konstruieren.

Lemma 2.5 Die Reihe

$$\sum_{0 \neq \lambda \in \Lambda} |\lambda|^{-\alpha}$$

konvergiert genau dann, wenn $\alpha > 2$ ist.

Beweis : Sei zunächst $\alpha > 2$ und wir zeigen Konvergenz. Aus dem Satz 2.4 erhält man eine Konstante c_2 mit

$$A_{n+1}(\Lambda) - A_n(\Lambda) \leq \frac{\pi}{\text{vol}(\Lambda)}((n+1+\delta)^2 - (n-\delta)^2) \leq c_2 \cdot n$$

für alle $n > \delta$. Sei

$$c_1 = \sum_{\substack{0 \neq \lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq \delta+1}} |\lambda|^{-\alpha}$$

die Summe über die von der ersten Abschätzung nicht kontrollieren Terme. Dann gilt für jede endliche Teilmenge $E \subseteq \Lambda \setminus \{0\}$ und $M := \max\{|\lambda|, \lambda \in E\}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in E} |\lambda|^{-\alpha} &\leq c_1 + \sum_{n \in \mathbb{N}, \delta < n < M} (A_{n+1}(\Lambda) - A_n(\Lambda)) \cdot n^{-\alpha} \\ &\leq c_1 + c_2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^{1-\alpha} = C < \infty, \end{aligned}$$

wobei C unabhängig von E ist.

Für $\alpha \leq 0$ divergiert die Reihe offensichtlich. Wir fixieren $0 < \alpha \leq 2$. Für $N \in \mathbb{N}$ mit $N > 2\delta$ folgt aus dem Satz die Existenz von $c_3 > 0$, sodass

$$A_{kN}(\Lambda) - A_{(k-1)N}(\Lambda) \geq \frac{\pi}{\text{vol}(\Lambda)} \left[(kN - \delta)^2 - ((k-1)N + \delta)^2 \right] \geq c_3 k.$$

Für $E_n = \{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\} : |\lambda| \leq n \cdot N\}$ gilt

$$\sum_{\lambda \in E_n} |\lambda|^{-\alpha} \geq \sum_{k=2}^n (A_{kN}(\Lambda) - A_{(k-1)N}(\Lambda)) \cdot (kN)^{-\alpha} \geq c_3 N^{-\alpha} \sum_{k=2}^n k^{1-\alpha}.$$

Die Divergenz folgt aus der Divergenz von $\sum_{n>1} k^{1-\alpha}$ für $\alpha < 2$. □

2.2 Meromorphe Funktionen und ihre Perioden

Wir wollen ab sofort in einem Körper von Funktionen arbeiten, der sowohl gebrochen rationale Funktionen (d.h. $\mathbb{C}(X)$) als auch auf \mathbb{C} konvergente Potenzreihen (z.B. $\exp(z)$) enthält.

Eine Funktion f heißt *meromorph* auf \mathbb{C} , falls es eine abgeschlossene, diskrete Teilmenge $D_f \subseteq \mathbb{C}$ gibt, sodass $f: \mathbb{C} \setminus D_f \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist und in allen Punkten von D_f nur Pole hat, d.h. für alle $z_0 \in D_f$ ist f in z_0 nicht holomorph, aber es gibt eine Umgebung $U(z_0)$ und $n(z_0) \in \mathbb{N}$, sodass

$$f(z) \cdot (z - z_0)^{n(z_0)} \quad \text{auf} \quad U \setminus \{z_0\}$$

beschränkt ist. (Damit lässt sich $f(z) \cdot (z - z_0)^{n(z_0)}$ zu einer holomorphen Funktion auf $U(z_0)$ fortsetzen). Das minimale $n(z_0)$, sodass $f(z) \cdot (z - z_0)^{n(z_0)}$ beschränkt ist, wird auch *Polstellenordnung* von f in z_0 genannt.

Sind f und g auf \mathbb{C} meromorph und $\alpha \in \mathbb{C}$, so sind auch αf , $f + g$ und $f \cdot g$ meromorph, wobei $D_{\alpha f} = D_f$, $D_{f+g} \subseteq D_f \cup D_g$ und $D_{fg} \subseteq D_f \cup D_g$ gilt. Wir verwenden ohne Beweis den Identitätssatz für holomorphe Funktionen, welcher besagt, dass eine holomorphe Funktion auf einem zusammenhängenden Gebiet, deren Nullstellenmenge einen Häufungspunkt besitzt, identisch Null ist. Als Konsequenz davon ist die Nullstellenmenge einer meromorphen Funktion diskret.

Aufgabe 2.2 (4 Punkte)

- i) Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die nicht konstant 0 ist. Zeige: Die Menge der Nullstellen von f besitzt keinen Häufungspunkt.

Hinweis: Potenzreihenentwicklung!

ii) Zeige den *Identitätssatz*: Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist genau dann $f = g$, wenn $\{z \in D \mid f(z) = g(z)\}$ einen Häufungspunkt besitzt.

Ist z_0 eine Nullstelle einer meromorphen Funktion f , so ist $f = (z - z_0)^j \cdot P$ auf einer Umgebung von z_0 für einen $j \in \mathbb{N}$ und eine Potenzreihe $P = \sum_{k \geq 0} a_k (z - z_0)^k$ mit $a_0 \neq 0$. Dann also ist $(z - z_0)^j \cdot \frac{1}{f} = P^{-1}$ holomorph auf dieser Umgebung und z_0 also ein Pol. Zusammenfassend haben wir gezeigt:

Proposition 2.6 Die auf \mathbb{C} meromorphen Funktionen bilden einen Körper \mathcal{M} .

Ein $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *Periode* der meromorphen Funktion f , falls $D_f + \lambda = D_f$ und $f(z + \lambda) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Wir wollen die Menge $\text{Per}(f)$ der Perioden einer meromorphen Funktion charakterisieren.

Lemma 2.7 Ist $f \in \mathcal{M}$ nicht konstant, so ist $\text{Per}(f)$ eine abgeschlossene, diskrete Untergruppe der additiven Gruppe $(\mathbb{C}, +)$.

Beweis : Die Eigenschaft Untergruppe ist aus der Definition klar. Ist $\text{Per}(f)$ nicht abgeschlossen oder nicht diskret, so gibt es in $\text{Per}(f)$ paarweise verschiedene $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, deren Limes $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$ in \mathbb{C} existiert. Da D_f nach dem Identitätssatz abgeschlossen ist, folgt $D_f + \lambda = D_f$. Ist $z_0 \notin D_f$, so ist also auch $z_0 + \lambda \notin D_f$. Dann aber hat $f - f(z_0)$ in den Punkten $z_0 + \lambda_n$ und $z_0 + \lambda$ Nullstellen, ist also nach dem Identitätssatz Null und f somit konstant. \square

Satz 2.8 Ist $f \in \mathcal{M}$ nicht konstant, so tritt genau einer der folgenden Fälle ein

- 1) $\text{Per}(f) = \{0\}$.
- 2) Es gibt ein λ_f , eindeutig bis auf das Vorzeichen, sodass $\text{Per}(f) = \mathbb{Z} \cdot \lambda_f$ (d.h. die Gruppe $\text{Per}(f)$ ist zyklisch).
- 3) $\text{Per}(f)$ ist ein Gitter in \mathbb{C} .

Beweis : Ist $\text{Per}(f) \neq \{0\}$ so gibt es ein $0 \neq \lambda_0 \in \text{Per}(f)$ mit $|\lambda| \geq |\lambda_0|$ für alle $\lambda \in \text{Per}(f)$. Aufgrund von Division mit Rest ist $\text{Per}(f) \cap \mathbb{R} \cdot \lambda_0 = \mathbb{Z} \cdot \lambda_0$. Ist also $\text{Per}(f) \subseteq \mathbb{R} \cdot \lambda_0$, so liegt der zweite Fall vor. Andernfalls gibt es ein $\lambda_1 \in \text{Per}(f) \setminus \mathbb{R} \cdot \lambda_0$. Damit ist $\mathbb{Z} \cdot \lambda_0 + \mathbb{Z} \cdot \lambda_1 \subseteq \text{Per}(f)$ und diese Teilmenge ist bereits ein Gitter. Wir nehmen als λ_1 das betragskleinste Element in $\text{Per}(f) \setminus \mathbb{R} \cdot \lambda_0$ und wollen zeigen, dass $\text{Per}(f) = \mathbb{Z} \cdot \lambda_0 + \mathbb{Z} \cdot \lambda_1$. Sei also $\lambda \in \text{Per}(f)$ beliebig. Da $\{\lambda_0, \lambda_1\}$ eine \mathbb{R} -Basis von \mathbb{C} bilden, können wir $\lambda = \mu_0 \lambda_0 + \mu_1 \lambda_1$ mit $\mu_0, \mu_1 \in \mathbb{R}$ schreiben. Wir wählen $m_0, m_1 \in \mathbb{Z}$, sodass $\beta_i = \mu_i - m_i$ die Eigenschaft $|\beta_i| \leq \frac{1}{2}$ haben. Es ist auch

$$\tilde{\lambda} = (\mu_0 - m_0)\lambda_0 + (\mu_1 - m_1)\lambda_1 = \beta_0\lambda_0 + \beta_1\lambda_1 \in \text{Per}(f).$$

Ist $\beta_1 = 0$, so ist $\mu_1 \in \mathbb{Z}$ und damit $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R} \cdot \lambda_0 \cap \text{Per}(f) = \mathbb{Z} \cdot \lambda_0$. Andernfalls ist

$$\begin{aligned} |\tilde{\lambda}|^2 &= |\beta_0 \lambda_0 + \beta_1 \lambda_1|^2 \\ &= |\lambda_0|^2 \left(\beta_1^2 \cdot \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right|^2 + 2\beta_0 \beta_1 \text{Re} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right) + \beta_0^2 \right). \end{aligned}$$

Nach Wahl von λ_1 ist $|\lambda_1 \pm \lambda_0| \geq |\lambda_1| \geq |\lambda_0|$, also $\left| \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \pm 1 \right| \geq \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right| \geq 1$ und hieraus folgt $\left| \text{Re} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right) \right| \leq \frac{1}{2}$. Damit können wir weiter abschätzen

$$|\tilde{\lambda}|^2 \leq |\lambda_0|^2 \cdot \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right|^2 |\beta_1^2 + \beta_0 \beta_1 + \beta_0^2| \leq \frac{3}{4} |\lambda_1|^2.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von λ_1 . □

Wir halten noch fest, was wir nebenbei bewiesen haben:

Lemma 2.9 Jedes Gitter $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ besitzt eine Basis $\{\lambda_0, \lambda_1\}$, so dass $\tau := \lambda_1/\lambda_0$ die Eigenschaften

$$\text{Im}(\tau) > 0, \quad |\tau| \geq 1, \quad \text{und} \quad |\text{Re}(\tau)| \leq 1/2$$

hat.

Beweis : Lediglich $\text{Im}(\tau) > 0$ haben wir oben nicht berücksichtigt. Wir ersetzen dazu gegebenenfalls λ_1 durch $-\lambda_1$. □

Die Eigenschaft 1) des Satzes 2.8 hat „fast jede“ meromorphe Funktion, z.B. jede gebrochen rationale Funktion. Jedes $f \in \mathcal{M}$, das sich als $f = g \circ \exp$ schreiben lässt, hat die Eigenschaft 2). Ziel ist es nun Beispiele für meromorphe Funktionen zu finden, welche die Eigenschaft 3) für ein vorgegebenes Gitter $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ haben.

Aufgabe 2.3 (4 Punkte)

Zeige für $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ die Äquivalenz folgender Aussagen:

- i) Λ ist ein Gitter.
- ii) Λ ist eine diskrete Untergruppe des \mathbb{R}^n , die in keiner Hyperebene enthalten ist.

Hinweis: Versuche das Argument aus Satz 2.8 per Induktion auf n Dimensionen zu übertragen.

Aufgabe 2.4 (3 Punkte)

Sei $\Gamma < \text{SL}_2(\mathbb{R})$ eine diskrete Untergruppe mit $A_0 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$. Beweisen Sie, dass wenn $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ mit $c \neq 0$, dann gilt $|c| \geq 1$.

Hinweis: Betrachten Sie die Folge $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ induktiv definiert durch $A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $0 < |c| < 1$ und $A_{n+1} = A_n A_0 A_n^{-1}$.

2.3 Elliptische Funktionen

Eine meromorphe Funktion f heißt *elliptisch* oder *doppelt periodisch*, falls $\text{Per}(f) = \Lambda$ ein Gitter in \mathbb{C} ist. Das Konvergenz-Lemma 2.5 gibt die Idee zur Konstruktion von elliptischen Funktionen.

Satz 2.10 *Die Reihe*

$$\wp(z) = \wp_{\Lambda}(z) = z^{-2} + \sum_{0 \neq \lambda \in \Lambda} ((z - \lambda)^{-2} - \lambda^{-2})$$

konvergiert in jedem Kompaktum von \mathbb{C} , das keinen Gitterpunkt von Λ enthält, gleichmäßig. Es ist $\text{Per}(\wp_{\Lambda}) = \Lambda$. Die Funktion \wp_{Λ} hat in jedem Gitterpunkt einen Pol zweiter Ordnung und ist auf $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ holomorph. Zudem ist in einer Umgebung von Null die Funktion $\wp(z) - 1/z^2$ holomorph mit einer Nullstelle zweiter Ordnung.

Die erste Behauptung ist eine Folge des nächsten Konvergenzlemmas.

Lemma 2.11 *Auf jedem Kompaktum $K \subseteq \{(z, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^3 : \lambda_2 \neq 0, \lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{R}, z \notin \mathbb{Z}\lambda_1 + \mathbb{Z}\lambda_2\}$ konvergiert die Reihe*

$$\wp(z; \lambda_1, \lambda_2) = z^{-2} + \sum_{0 \neq \lambda \in \mathbb{Z}\lambda_1 + \mathbb{Z}\lambda_2} ((z - \lambda)^{-2} - \lambda^{-2})$$

absolut gleichmäßig.

Beweis : Ist $K_2 \subseteq \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 : \lambda_2 \neq 0, \lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{R}\} =: L$ kompakt, so behaupten wir, dass es $\alpha, \beta > 0$ gibt, sodass für alle $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ und $(\lambda_1, \lambda_2) \in K_2$ gilt:

$$\alpha |m_1 i + m_2| \leq |m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2| \leq \beta |m_1 i + m_2|.$$

Zum Beweis beobachtet man, dass die Ungleichung homogen unter reeller Reskalierung von (m_1, m_2) ist. Also nehmen wir $m_1^2 + m_2^2 = 1 = |m_1 i + m_2|^2$ an. Die stetige Funktion

$$(\lambda_1, \lambda_2, m_1, m_2) \mapsto |m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2|$$

nimmt auf der kompakten Menge ihr Maximum und Minimum an. Da $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{R}$, ist das Minimum positiv und die erste Behauptung gezeigt.

Zum Kompaktum K , wie in der Aussage des Lemmas, wählen wir $\rho > 0$ und $K_2 \subseteq L$, sodass $K \subseteq B_{\rho}(0) \times K_2$. Seien α, β wie in der ersten Behauptung. Dann gibt es nur endlich viele $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$ mit $|m_1 i + m_2| < (\rho + 1)/\alpha$. Für alle anderen gilt für $\lambda = m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2$ und $z \in B_{\rho}(0)$ wegen $|\lambda| \geq \rho + 1 \geq |z|$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right| &= \left| \frac{2z\lambda - z^2}{\lambda^2(z-\lambda)^2} \right| = \left| \frac{2 - z/\lambda}{(1 - z/\lambda)^2} \right| \cdot \frac{|z|}{|\lambda|^3} \\ &\leq \frac{3}{((1 - \rho/(\rho+1))^2 |\lambda|^3)} \leq \frac{3\rho(\rho+1)^2}{\alpha^3 \cdot |m_1i + m_2|^3} \end{aligned}$$

und die Konvergenz folgt aus dem Lemma 2.5, angewandt auf das Gitter $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$. \square

Beweis des Satzes 2.10 : Zum Beweis der Polstellen und Holomorphie schreiben wir zu gegebenem $\rho > 0$

$$\wp(z) = z^{-2} + \sum_{0 < |\lambda| < \rho+1} f_\lambda(z) + \sum_{|\lambda| \geq \rho+1} f_\lambda(z),$$

wobei $f_\lambda(z) = (z - \lambda)^{-2} - \lambda^{-2}$. Der Term z^{-2} und die erste Summe sind auf $B_\rho(0)$ meromorph mit Polen zweiter Ordnung in $\Lambda \cap B_\rho(0)$. Auf $z \in B_\rho(0)$ sind die Summanden der zweiten Summe alle endlich und die Reihe konvergiert nach dem vorigen Lemma, ist also holomorph auf $B_\rho(0)$.

Nach dem Konvergenzlemma können wir Term für Term ableiten und erhalten für $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$

$$\wp'_\Lambda(z) = -2 \cdot \sum_{\lambda \in \Lambda} (z - \lambda)^{-3}.$$

Mit der gleichen Abschätzung wie im vorangehenden Konvergenzlemma erhalten wir, dass diese Reihe absolut konvergiert. Also ist $\wp'_\Lambda(z + \lambda) = \wp'_\Lambda(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ und alle $\lambda \in \Lambda$. Also ist $\text{Per}(\wp'_\Lambda) \supseteq \Lambda$, sogar $=$, da Λ die Polstellenmenge von \wp'_Λ ist. Folglich ist $\wp_\Lambda(z + \lambda) = \wp_\Lambda(z) + C(\lambda)$. Aus der absoluten Konvergenz der definierenden Reihe folgt, dass \wp_Λ gerade ist (d.h. $\wp_\Lambda(-z) = \wp_\Lambda(z)$). Speziell für $z = -\lambda/2$ folgt also $C(\lambda) = C(-\lambda) = 0$ und daher $\text{Per}(\wp_\Lambda) = \Lambda$. Die letzte Aussage folgt aus dem folgenden Satz. \square

Wir bestimmen nun die Koeffizienten von \wp_Λ . Obwohl wir eigentlich elliptische Funktionen untersuchen, werden wir damit zum ersten Mal Modulformen begegnen. Für $k \in \mathbb{Z}$ wird die Reihe

$$G_k = G_k(\Lambda) = \sum_{0 \neq \lambda \in \Lambda} \lambda^{-k}$$

die k -te Eisensteinreihe genannt. Für $k \geq 3$ konvergiert sie nach dem Lemma 2.5 absolut. Das damit erlaubte Umsortieren impliziert (da mit λ auch $-\lambda$ in Λ liegt) die Beziehung $G_k = (-1)^k \cdot G_k$, also ist $G_k = 0$ für ungerades Gewicht k .

Satz 2.12 Für $\gamma(\Lambda) = \min \{|\lambda|, \lambda \in \Lambda \setminus \{0\}\}$ gilt

$$\wp_\Lambda(z) = z^{-2} + \sum_{n=2}^{\infty} (2n-1)G_{2n}z^{2n-2} \quad \text{auf } B_{\gamma(\Lambda)}(0).$$

Beweis : Für $|t| < 1$ folgt aus

$$\frac{1}{(1-t)^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{1-t} \right) = \sum_{m=1}^{\infty} m t^{m-1}$$

die Identität (für $\lambda \neq 0$ und $|z| < \gamma(\lambda)$)

$$\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{1}{(1-z/\lambda)^2} - 1 \right) = \sum_{m=2}^{\infty} m \frac{z^{m-1}}{\lambda^{m+1}}.$$

Da für $m \geq 2$

$$\left| m \cdot \frac{z^{m-1}}{\lambda^{m+1}} \right| \leq m \cdot |z| \cdot \left(\frac{|z|}{\gamma} \right)^{m-2} \cdot |\lambda|^{-3} \leq m \cdot \gamma \cdot \left(\frac{|z|}{\gamma} \right)^{m-2} \cdot |\lambda|^{-3}$$

gilt und da die Reihe über $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$ der rechten Seite nach dem Lemma 2.5 konvergiert, gilt die Vertauschung:

$$\wp_{\Lambda}(z) = z^{-2} + \sum_{0 \neq \lambda \in \Lambda} \left(\sum_{m=2}^{\infty} m \frac{z^{m-1}}{\lambda^{m+1}} \right) = z^{-2} + \sum_{m \geq 2} m G_{m+1} z^{m-1}.$$

□

Wir fixieren nun Λ und beweisen Strukturaussagen über die Menge $K(\Lambda)$ der elliptischen Funktionen, deren Periode Λ enthält. Offenbar gilt:

Proposition 2.13 Die Menge $K(\Lambda)$ ist ein Teilkörper von \mathcal{M} .

Proposition 2.14 Ist $f \in K(\Lambda)$ holomorph, so ist f konstant. Jedes $f \in K(\Lambda)$ hat in einem Fundamentalparallelogramm nur endlich viele Pole.

Beweis : Sei F ein Fundamentalparallelogramm von Λ . Dann ist $f(F) = f(\mathbb{C})$ beschränkt, da F kompakt ist. Ist $f \in K(\Lambda)$ holomorph, so ist f nach dem Satz von Liouville konstant. Die zweite Aussage ist für $f = 0$ trivial, andernfalls folgt sie aus dem Identitätssatz, angewandt auf $1/f$. □

Wir erinnern an die Definition des Residuums einer Funktion f , die auf $B_{\rho}(z_0) \setminus \{z_0\}$ holomorph ist und bei z_0 einen Pol, sagen wir der Ordnung k , besitzt. Dann ist

$$(z - z_0)^k f(z) = \sum_{n \geq 0} b_n (z - z_0)^n, \quad \text{oder auch} \quad f(z) = \sum_{n \geq -k} a_n (z - z_0)^n,$$

wobei $a_n = b_{n+k}$ ist. Dann definiert man

$$\text{Res}_{z_0}(f) = a_{-1} (= b_{k-1})$$

und nach dem Cauchy-Integralsatz gilt

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho} f(z) dz,$$

wobei ρ ein Weg um z_0 (einmal, gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen) ist.

Proposition 2.15 *Ist F ein Fundamentalparallelogramm von Λ und $f \in K(\Lambda)$ so gilt*

$$\sum_{z_0 \in F} \operatorname{Res}_{z_0}(f) = 0.$$

Beweis : Sei u so gewählt, dass auf dem Rand von $F + u$ keine Singularitäten von f liegen. Nach der vorigen Proposition ist dies möglich. Dann gilt

$$\begin{aligned} \pm 2\pi i \sum_{z_0 \in F} \operatorname{Res}_{z_0}(f) &= \int_u^{u+\lambda_1} f(z) dz + \int_{u+\lambda_1}^{u+\lambda_1+\lambda_2} f(z) dz + \int_{u+\lambda_1+\lambda_2}^{u+\lambda_2} f(z) dz + \int_{u+\lambda_2}^u f(z) dz \\ &= \int_u^{u+\lambda_1} (f(z) - f(z + \lambda_2)) dz + \int_{u+\lambda_2}^u (f(z) - f(z + \lambda_1)) dz = 0, \end{aligned}$$

wobei das Vorzeichen von der Orientierung der Gitterbasis $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ abhängt, welche F aufspannt. □

Eine Folge hiervon ist, dass es kein $f \in K(\Lambda)$ gibt, welches in F nur einen einfachen Pol besitzt - entweder es gibt mehrere oder einen mit höherer Ordnung (oder beides).

Korollar 2.16 *Ist $f \in K(\Lambda)$ nicht konstant, so gilt für alle $w \in \mathbb{C}$*

$$\sum_{z_0 \in F} \operatorname{ord}_{z_0}(f - w) = 0.$$

Insbesondere wird jeder Wert $w \in \mathbb{C}$ von f angenommen.

Beweis : Für $g(z) = f'(z)/(f(z) - w)$ ist $\operatorname{Res}_{z_0}(g) = \operatorname{ord}_{z_0}(f - w)$ und die Behauptung folgt aus dem vorigen Satz. □

Wir können jetzt die Nullstellen von \wp' analysieren.

Lemma 2.17 *Die Nullstellen von \wp' bilden die Menge*

$$Z(\wp') = \frac{1}{2}\Lambda \setminus \Lambda = \left\{ \frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_2}{2}, \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right\} + \Lambda.$$

Beweis : Da \wp gerade und \wp' somit ungerade ist, folgt $\wp'(z + \lambda) = \wp'(z) = -\wp'(-z)$. Ist $\lambda/2 \notin \Lambda$, also $\lambda/2$ kein Pol von \wp oder \wp' , so kann man oben $z = \lambda/2$ setzen und erhält eine Inklusion. Da \wp' in einem Fundamentalparallelogramm nur einen Pol dritter Ordnung hat, folgt aus obigem Korollar, dass wir alle Nullstellen gefunden haben. □

Setzt man $e_1 = \wp(\lambda_1/2), e_2 = \wp(\lambda_2/2), \lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2$ und $e_3 = \wp((\lambda_1 + \lambda_2)/2)$, so folgt durch Vergleich von Nullstellen leicht der folgende Satz (Übung!).

Satz 2.18 Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ gilt

$$\wp'(z)^2 = 4 \cdot (\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3).$$

Wir können nun die Struktur des Körpers $K(\Lambda)$ bestimmen. Zunächst ist $\mathbb{C}(\wp)$ eine transzendente Erweiterung von \mathbb{C} , denn in einem (nicht konstanten) polynomialen Ausdruck in \wp können sich die Pole von \wp nicht wegheben.

Satz 2.19 a) Der Teilkörper $K(\Lambda)^{\text{even}} \subseteq K(\Lambda)$ der geraden elliptischen Funktionen ist isomorph zu $\mathbb{C}(\wp)$.

b) Es ist

$$K(\Lambda) = \mathbb{C}(\wp)[\wp'] \cong \mathbb{C}(X)[Y]/I(X, Y),$$

wobei $I(X, Y) = \langle Y^2 - 4(X - e_1)(X - e_2)(X - e_3) \rangle$ ist.

Beweis : Zum Beweis von a) sei $f \in K(\Lambda)^{\text{even}}$ eine nicht-konstante Funktion. Sei $m = \sum_{z_0 \in F} \min(\text{ord}_{z_0}(f), 0)$ die Anzahl der Pole von f in F mit Vielfachheit gezählt. Sei $N = \{z_0 \in F : f'(z_0) = 0\}$, was offenbar eine endliche Menge ist. Als Zwischenbehauptung zeigen wir, dass $m = 2k$ gerade ist und dass es zu jedem $u \notin f(N)$ paarweise verschiedene Punkte

$$z_1, \dots, z_k, z'_1, \dots, z'_k \in F \quad \text{mit} \quad z_i + z'_i \in \Lambda \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, k, \quad (2.1)$$

gibt, sodass $f(z) - u$ genau an den Stellen $z_1, \dots, z_k, z'_1, \dots, z'_k$ verschwindet und zwar mit Vielfachheit eins.

Diese Zwischenbehauptung wenden wir auf zwei Werte u und v an. Seien $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_k, \tilde{z}'_1, \dots, \tilde{z}'_k$ die Stellen laut Zwischenbehauptung für v . Dann hat also

$$g(z) = \frac{f(z) - u}{f(z) - v}$$

genau an den z_i und z'_i einfache Nullstellen und an den \tilde{z}_i und \tilde{z}'_i einfache Polstellen. Da f gerade ist, sind die $z_i, z'_i, \tilde{z}_i, \tilde{z}'_i$ allesamt nicht in $\frac{1}{2}\Lambda$. Da diese Punkte also nicht Nullstellen von \wp' sind, hat

$$h(z) = \frac{(\wp(z) - \wp(z_1)) \cdot \dots \cdot (\wp(z) - \wp(z_k))}{(\wp(z) - \wp(\tilde{z}_1)) \cdot \dots \cdot (\wp(z) - \wp(\tilde{z}_k))}$$

ebenso genau an den $z_i, z'_i, \tilde{z}_i, \tilde{z}'_i$ einfache Nullstellen bzw. Polstellen. Also ist g/h konstant und damit $g \in \mathbb{C}(\wp)$, also $f = (vg - u)/(g - 1) \in \mathbb{C}(\wp)$.

Zum Beweis der Zwischenbehauptung sei $f(z_i) = u$. Dann ist auch $f(-z_i) = u$, also gibt es ein $\lambda \in \Lambda$ mit $\lambda - z_i \in F$ und wir setzen $z'_i = \lambda - z_i$. Falls $z'_i = z_i$, so wäre $f(z_i + z) =$

$f(\lambda - z_i + z) = f(-z_i + z) = f(z_i - z)$, also $f'(z_i + z) = -f'(z_i - z)$ und damit $f'(z_i) = 0$, im Widerspruch an die Voraussetzung an u .

Zum Beweis von b) definieren wir zu nichtkonstantem $f \in K(\Lambda)$ die Funktionen

$$g(z) = \frac{1}{2}(f(z) + f(-z)) \in K(\Lambda)^{\text{even}} \quad \text{und} \quad h(z) = \frac{1}{2\wp'(z)}(f(z) - f(-z)) \in K(\Lambda)^{\text{even}}.$$

Dann ist $f = g + h \cdot \wp'$ und hieraus folgt, dass $[K(\Lambda) : \mathbb{C}(\wp)] = 2$ ist. Die Form der Gleichung wurde bereits in Satz 2.18 bestimmt. \square

An dieser Stelle könnte man sowohl zur algebraischen Geometrie (die Menge $V(Y^2 - 4(X - e_1)(X - e_2)(X - e_3))$ ist eine algebraische Varietät) als auch zur Geometrie Riemannscher Flächen (diese Menge ist isomorph zum Quotienten \mathbb{C}/Λ , einer Riemannschen Fläche vom Geschlecht eins) verzweigen. Ziel dieser Vorlesung ist weder das eine noch das andere: Wir konzentrieren uns auf funktionentheoretische und zahlentheoretische Aspekte von \wp und ihrer Verwandten.

Aufgabe 2.5 (4 Punkte)

Zeige: \wp erfüllt die Differentialgleichung

$$(\wp'(z))^2 = 4\wp^3(z) - 60G_4\wp(z) - 140G_6.$$

Hinweis: Zeige, dass die Differenz beider Seiten holomorph und periodisch ist.

Aufgabe 2.6 (4 Punkte)

Zeige das Additionstheorem für die \wp -Funktion: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ mit $z, w, z \pm w \notin \Lambda$ gilt

$$\wp(z+w) + \wp(z) + \wp(w) = \frac{1}{4} \left(\frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)} \right)^2,$$

wobei Λ das zu \wp gehörige Gitter ist.

Hinweis: Zeige zunächst, dass für $w \in \mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}\Lambda$

$$f(z; w) = \frac{1}{2} \frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)}$$

eine elliptische Funktion mit einfachen Polen in den Punkten $z \in \Lambda$ und $z \in -w + \Lambda$ ist.

Aufgabe 2.7 (6 Punkte)

Sei $\Lambda = \lambda_1\mathbb{Z} \oplus \lambda_2\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ ein Gitter mit $\lambda_1 > 0$ und $\frac{1}{i}\lambda_2 > 0$.

i) Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$. Zeige: $\wp(z)$ ist genau dann reell, wenn es ein $\lambda \in \Lambda$ mit

$$z \in \frac{\lambda}{2} + \mathbb{R} \quad \text{oder} \quad z \in \frac{\lambda}{2} + i\mathbb{R} \quad \text{gibt.}$$

Hinweis: Zeige, dass $\wp(z) = \wp(\lambda_1 + \bar{z}) = \wp(\lambda_1 + \lambda_2 - z) = \wp(\lambda_2 - \bar{z})$, falls $\wp(z) \in \mathbb{R}$.

ii) Zeige: Die \wp -Funktion bildet das Rechteck

$$R = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\lambda_1}{2}, 0 < \operatorname{Im} z < \operatorname{Im} \frac{\lambda_2}{2} \right\}$$

biholomorph auf die untere Halbebene $\overline{\mathbb{H}} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}$ ab.

Hinweis: $\wp(R)$ ist zusammenhängend und $\wp(2R) = \mathbb{C}$!

iii) Gib eine biholomorphe Abbildung an, die das Einheitsquadrat

$$Q = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z < 1\}$$

auf die Einheitskreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ abbildet.

2.4 Die Abhängigkeit vom Gitter

Ziel des Abschnitts ist es, jedem Gitter $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ eine Zahl $j(\Lambda) \in \mathbb{C}$ zuzuordnen, sodass die Zahl die Äquivalenzklasse des Gitters, d.h. das Gitter Λ bis auf Multiplikation mit einem Skalar, detektiert. Offenbar gelten nach Definition für $\mu \in \mathbb{C}^*$

$$G_k(\mu \cdot \Lambda) = \mu^{-k} \cdot G_k(\Lambda) \quad \text{und} \quad \wp_{\mu\Lambda}(\mu z) = \mu^{-2} \wp_{\Lambda}(z).$$

Wir definieren nun

$$g_2 = 60G_4, g_3 = 140G_6$$

sowie

$$\Delta = \Delta(\Lambda) = g_2^3 - 27g_3^2 \quad \text{und} \quad j = j(\Lambda) = (12g_2)^3 / \Delta.$$

Der erste Teil der Definition ist dadurch motiviert, dass die Differentialgleichung für die \wp -Funktion aus der Übung nun die Gestalt

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2 \cdot \wp - g_3 \tag{2.2}$$

erhält. Die Funktion Δ ist also die Diskriminante des kubischen Polynoms auf der rechten Seite. Die Definition von j rechtfertigt der folgende Satz.

Satz 2.20 Zwei Gitter Λ_1 und Λ_2 in \mathbb{C} sind äquivalent genau dann, wenn $j(\Lambda_1) = j(\Lambda_2)$ gilt.

Wir zeigen zunächst eine schwächere Form der Aussage.

Proposition 2.21 Sei Λ ein Gitter. Ist f auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ meromorph, nicht-konstant und genügt der Differentialgleichung

$$(f')^2 = 4f^3 - g_2(\Lambda)f - g_3(\Lambda),$$

so ist $f = \wp(z + w)$ für ein $w \in \mathbb{C}$. Insbesondere ist $\operatorname{Per}(f) = \Lambda$ und somit Λ durch die Zahlen $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ eindeutig bestimmt.

Beweis : Aufgrund von Korollar 2.16 gibt es ein $w \in \mathbb{C}$, sodass an einer festen Stelle $z_0 \in G$ die Anfangswertbedingung $f(z_0) = \wp(z_0 + w)$ erfüllt ist. Nun ist aufgrund der Differentialgleichung $f'(z_0) = \pm \wp'(z_0 + w)$ und indem man gegebenenfalls statt w den Wert $-w - 2z_0 \in \mathbb{C}$ verwendet, stimmen f und $\wp(z_0 + w)$ sowie deren Ableitungen im Punkt z_0 überein. Sowohl $f(z)$ als auch $\wp(z + w)$ genügen der linearen Differentialgleichung 2. Ordnung $2u'' = 12u^2 - g_2$, welche aus der ursprünglichen durch Differentiation folgt. Alle Behauptungen folgen nun aus dem Existenz- und Eindeigkeitssatz für Anfangswertprobleme linearer Differentialgleichungen. \square

Beweis des Satzes 2.20 : Ist $\Lambda_1 = \mu \cdot \Lambda_2$ für ein $\mu \in \mathbb{C}^*$, so gilt aufgrund der Homogenität der Eisensteinreihen $\Delta(\mu\Lambda) = \mu^{-12}\Delta(\Lambda)$ und $g_2^3(\mu\Lambda) = \mu^{-12}g_2^3(\Lambda)$, woraus die Behauptung folgt. Für die Umkehrung notieren wir zunächst, dass aus (2.2) und Satz 2.18 die Beziehungen

$$0 = e_1 + e_2 + e_3, g_2 = -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_1e_3), g_3 = 4e_1e_2e_3$$

und damit

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 = 16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2 \neq 0.$$

folgt. Sei also $j(\Lambda_1) = j(\Lambda_2)$ und dies zudem ungleich Null. Dann gibt es ein $0 \neq \mu \in \mathbb{C}$ mit

$$g_2(\Lambda_2) = \mu^{-4}g_2(\Lambda_1) = g_2(\mu\Lambda_1).$$

Also $\Delta(\mu\Lambda_1) = \Delta(\Lambda_2)$ und somit

$$g_3(\Lambda_2) = \pm \mu^{-6}g_3(\Lambda_1) = \pm g_3(\mu\Lambda_1).$$

Man hat noch die Wahl μ durch $i\mu$ zu ersetzen und erreicht so, dass die Gleichung mit dem positiven Vorzeichen erfüllt ist. Die Behauptung folgt nun aus der vorangehenden Proposition. Ist $j(\Lambda_1) = j(\Lambda_2) = 0$, so ist $g_2(\Lambda_1) = g_2(\Lambda_2) = 0$. Aus $\Delta(\Lambda_i) \neq 0$ folgt $g_3(\Lambda_i) \neq 0$ für $i = 1, 2$ und man findet wie oben ein μ , sodass

$$g_3(\Lambda_2) = \mu^{-6}g_3(\Lambda_1) = g_3(\mu\Lambda_1).$$

Dann kann man wieder mit der vorangehenden Proposition den Beweis beenden. \square

Da die Abhängigkeit von G_4, G_6, Δ unter Reskalierung des Gitters offensichtlich ist, nehmen wir ab sofort an, dass Λ den Vektor 1 enthält. Genauer können wir nach Lemma 2.9 annehmen, dass

$$\Lambda = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z} \cdot 1 =: \Lambda_\tau \quad \text{mit} \quad \tau \in \mathbb{H}$$

ist. Wir untersuchen nun $G_4(\tau) := G_4(\Lambda_\tau)$ etc. in Abhängigkeit von τ .

2.5 Fourierentwicklungen

Die Eisensteinreihen sind, als Koeffizienten der Entwicklung von \wp schon wegen ihres Definitionsbereiches nicht Gitter-periodisch, aber aus der Definition ist unmittelbar ersichtlich, dass $G_{2k}(\tau + 1) = G_{2k}(\tau)$ ist. Der Prototyp aller Abbildungen f mit $f(\tau + 1) = f(\tau)$ ist $q(\tau) = e^{2\pi i\tau}$. Wir wollen also G_{2k} , Δ und j als Potenzreihe in q schreiben. Dazu benötigen wir folgende Vorbereitung.

Proposition 2.22 Für $\tau \in \mathbb{H}$ und $\mathbb{Z} \ni k \geq 2$ gilt (mit $q(\tau) = e^{2\pi i\tau}$)

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (\tau + n)^{-k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{d=1}^{\infty} d^{k-1} q^d.$$

Beweis : Wir leiten die Cotangens-Partialbruchzerlegung

$$\pi \cot(\pi\tau) = \frac{1}{\tau} + \sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{\tau - n} + \frac{1}{n} \right)$$

ab und erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\tau + n)^{-2} &= \left(\frac{\pi}{\sin \pi\tau} \right)^2 = \left(\frac{2\pi i}{e^{\pi i\tau} - e^{-\pi i\tau}} \right)^2 \\ &= (2\pi i)^2 e^{2\pi i\tau} \frac{1}{(1 - e^{2\pi i\tau})^2} = (2\pi i)^2 \cdot \sum_{d=1}^{\infty} dq^d. \end{aligned}$$

Das ist die Behauptung für $k = 2$ und da beide Seiten für $\tau \in \mathbb{H}$ lokal gleichmäßig konvergieren, können wir termweise ableiten und erhalten die Behauptung für alle $k \geq 2$. \square

Satz 2.23 Für alle $\tau \in \mathbb{H}$ und $k \geq 4$ gerade ist

$$G_k(\tau) = 2\zeta(k) + 2 \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{d=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(d) q^d, \quad (2.3)$$

wobei $\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-s}$ und $\sigma_{\rho}(d) = \sum_{e|d} e^{\rho}$ die ρ -te teile summatorische Funktion ist.

Der Ausdruck auf der rechten Seite von (2.3) konvergiert auf jeder Menge $\mathbb{H}_{\varepsilon} = \{\tau \in \mathbb{H} : \text{Im } \tau > \varepsilon\}$ absolut gleichmäßig. Folglich ist G_k holomorph auf \mathbb{H} .

Beweis : Nach dem Konvergenz-Lemma 2.5 können wir Terme umsortieren und erhalten

$$\begin{aligned} G_k(\tau) &= \sum_{n \neq 0} n^{-k} + \sum_{m \neq 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (m\tau + n)^{-k} = 2\zeta(k) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (m\tau + n)^{-k} \\ &= 2\zeta(k) + 2 \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{d=1}^{\infty} d^{k-1} q^{dm}, \end{aligned}$$

was nach Sortieren nach q -Potenzen die obige Formel gibt. Man kann $\sigma_{k-1}(d) \leq \sum_{n=1}^d n^{k-1}$ grob durch ein Polynom vom Grad k abschätzen. Das Bild von \mathbb{H}_ε unter q ist die punktierte Kreisscheibe vom Radius $e^{-2\pi\varepsilon} < 1$. Auf dieser dominiert die geometrische Reihe das polynomiale Wachstum und das impliziert absolut gleichmäßige Konvergenz auf \mathbb{H} . \square

Aus den Formeln $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ und $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$ (siehe Übung) folgt für die Eisensteinreihen in der Definition von j

$$\begin{aligned} G_4(\tau) &= \frac{\pi^4}{45} \left(1 + 240 \cdot \sum_{d=1}^{\infty} \sigma_3(d) q^d \right) \\ G_6(\tau) &= \frac{2\pi^6}{945} \left(1 - 504 \cdot \sum_{d=1}^{\infty} \sigma_5(d) q^d \right). \end{aligned}$$

Wir verwenden regelmässig noch zwei weitere Normalisierungen. Zum einen seien E_k die Eisensteinreihen normiert auf konstanten Koeffizienten eins, also zum Beispiel

$$\begin{aligned} E_4(\tau) &= 1 + 240 \cdot \sum_{d=1}^{\infty} \sigma_3(d) q^d \\ E_6(\tau) &= 1 - 504 \cdot \sum_{d=1}^{\infty} \sigma_5(d) q^d. \end{aligned}$$

Zum anderen seien \mathbb{G}_k die Eisensteinreihen, deren nicht-konstante Koeffizienten genau die teilersummarischen Funktionen sind. Dann sind (siehe Übung) die Konstantglieder gerade $\frac{B_k}{2k}$, wobei B_k die k -te Bernoulli-Zahl ist. Also zum Beispiel

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_4(\tau) &= \frac{1}{240} + \sum_{d=1}^{\infty} \sigma_3(d) q^d \\ \mathbb{G}_6(\tau) &= \frac{1}{504} + \sum_{d=1}^{\infty} \sigma_5(d) q^d. \end{aligned}$$

Aus den Fourier-Entwicklungen für G_4 und G_6 lesen wir die Fourier-Entwicklung für Δ ab.

Satz 2.24 Die Diskriminante $\Delta(\tau)$ hat die Fourier-Entwicklung

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} \cdot \sum_{d=1}^{\infty} \tau(d) q^d,$$

wobei $\tau(1) = 1$ und $\tau(d) \in \mathbb{Z}$ für alle $d \geq 1$.

Die Bezeichnung der Koeffizienten mit $\tau(d)$ ist in der Literatur gängig, ebenso wie die Verwendung der Variable $\tau \in \mathbb{H}$, was nicht zu Konfusion führen sollte.

Beweis : Wir schreiben als Abkürzung $A = \sum_{d=1}^{\infty} \sigma_3(d)q^d$ und $B = \sum_{d=1}^{\infty} \sigma_5(d)q^d$. Nach Definition ist dann

$$\Delta(\tau) = \frac{(2\pi)^{12}}{1728} ((1 + 240A)^3 - (1 - 504B)^2) = (2\pi)^{12} \cdot (q + \dots).$$

Es ist also noch zu zeigen, dass die Koeffizienten $\tau(d)$ ganzzahlig sind. Dazu rechnet man nach, dass $d^3 \equiv d^5 \pmod{12}$ für alle $d \in \mathbb{Z}$ gilt. Also folgt auch $\sigma_3(d) \equiv \sigma_5(d) \pmod{12}$ und damit ist

$$(1 + 240A)^3 - (1 - 504B)^2 \equiv 12^2(5A + 7B) \equiv 0 \pmod{12^3}.$$

□

Die Funktionen G_k (und damit auch Δ) kann man auch als Funktionen von $q \in B_0(1) \setminus \{0\}$ auffassen. Anhand der Beschreibung der vorangehenden Sätze erkennt man, dass man sie sogar als Funktionen von $q \in B_0(1)$ auffassen, d.h. nach Null holomorph fortsetzen kann. Für die j -Funktion ist dies nicht der Fall.

Satz 2.25 Die j -Invariante $j: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph und besitzt eine Fourier-Entwicklung der Form

$$j(\tau) = \frac{1}{q} + \sum_{d=0}^{\infty} j_d q^d = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + \dots \quad \text{mit } j_d \in \mathbb{Z}.$$

Zum Beweis verwenden wir folgende allgemeine Bemerkung.

Proposition 2.26 Sind $f = \sum_{n \geq 0} a_n q^n$ und $g = \sum_{n \geq 0} b_n q^n$ auf $|q| < 1$ konvergente Potenzreihen mit $a_n \in \mathbb{Z}$, $b_n \in \mathbb{Z}$ und $b_0 = 1$, sowie $g(q) \neq 0$ für alle $|q| < 1$, so ist auf f/g eine auf $|q| < 1$ konvergente Potenzreihe mit ganzzahligen Koeffizienten.

Beweis : Es ist f/g holomorph, also in eine Potenzreihe entwickelbar. Schreiben wir $f/g = \sum_{n \geq 0} c_n q^n$, so folgt aus

$$\left(\sum_{n \geq 0} c_n q^n \right) \cdot \left(\sum_{n \geq 0} b_n q^n \right) = \left(\sum_{n \geq 0} a_n q^n \right)$$

und $b_0 = 1$ die Rekursion

$$c_0 = a_0, \quad c_m = a_m - \sum_{n=0}^{m-1} c_n b_{m-n}$$

und damit folgt, dass c_m ganzzahlig für alle $m \in \mathbb{N}$ ist. □

Beweis von Satz 2.25 : Wir wenden die vorangegangene Proposition auf $f = (12g_2)^3$ und $g = \Delta/q$ an. □

Aufgabe 2.8 (6 Punkte)

Sei $g: \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ unendlich oft stetig differenzierbar.

- i) Zeige: g besitzt eine *Fourier-Entwicklung*, d.h. für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(g) e^{2\pi i k x},$$

mit $c_k(g) = \int_0^1 g(t) e^{-2\pi i k t} dt$, wobei diese Reihen gleichmäßig konvergieren.

Hinweis: Partielle Integration! Außerdem: Zeige, dass ohne Einschränkung $x = 0$ und $g(0) = 0$ angenommen werden können.

- ii) Zeige, dass die Fourier-Koeffizienten eindeutig sind.

Genauer: Für $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ für die

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n x}$$

lokal gleichmäßig konvergiert gilt bereits $a_n = c_n(g)$ für alle n .

Hinweis: Gleichmäßige Konvergenz erlaubt das Vertauschen von Integration und Summation.

Aufgabe 2.9 (4 Punkte)

Erinnere dich an den Kotangens:

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}.$$

Zeige: Er besitzt (für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$) eine Partialbruchzerlegung

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+m} + \frac{1}{z-m} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right).$$

Hinweis: Betrachte für festes $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ die Funktion

$$f(w) = \frac{z}{w(z-w)} \pi \cot(\pi w).$$

Zeige, dass f als Singularitäten nur Pole 1. und 2. Ordnung besitzt und außerhalb von $\{z\} \cup \mathbb{Z}$ holomorph ist. Betrachte dann für ein geeignetes Quadrat $Q \subset \mathbb{C}$ (dessen Rand keine Singularitäten von f enthält!) das Wegintegral von f und zeige

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q} f(\zeta) d\zeta = -\pi \cot(\pi z) + \frac{1}{z} + \sum_{0 < |n| \leq N} \frac{z}{n(z-n)}$$

für geeignetes $N \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2.10 (6 Punkte)

- i) Zeige: Für $k \in \mathbb{N}$ existieren eindeutig bestimmte *rationale* Zahlen B_k , so dass für $|z| < 2\pi$

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z e^z + 1}{2 e^z - 1} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k B_k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

gilt. Die B_k heißen *Bernoulli-Zahlen*.

Hinweis: Potenzreihenentwicklung und Cauchy-Produkt!

ii) Zeige: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\zeta(2k) = \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} B_k \pi^{2k}.$$

Dabei ist $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, $\operatorname{Re}(s) > 1$, die Riemannsche Zetafunktion.

Hinweis: Zeige mit Hilfe von Aufgabe 2:

$$z \cot z = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{2^{2k} z^{2k}}{(2k)!} = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{n^{2k} \pi^{2k}}.$$

2.6 Exkurs: Kongruenzen und Koeffizientenwachstum

Wir haben G_4, G_6 , allgemein G_{2k} als Bausteine der \wp -Funktion kennengelernt, die j -Funktion als Gitterinvariante und Δ als Baustein darin. Grund genug die Koeffizienten näher anzusehen. Das tat S. Ramanujan (1887-1920) in seinem kurzen Leben intensiv, widmete sich die letzten 10 Jahre zurückgezogen ausschließlich der Mathematik und hinterließ ein Notizbuch ('Ramanujans's lost notebook') voller erstaunlicher Formeln. Ramanujan, ohne akademische Ausbildung, war ein außergewöhnlicher Rechenkünstler. Sein Notizbuch enthält unter anderem Aussagen über die Koeffizienten $\tau(d)$ der Δ -Funktion. Um diese in Perspektive zu setzen, beginnen wir mit den einfacheren Aussagen über die Eisensteinreihen. Es ist

$$G_4 = \frac{\pi^4}{45} (1 + 240q + 2160q^2 + 6720q^3 + 17520q^4 + 30240q^5 + 60480q^6 + 140400q^8 + \dots)$$

und

$$G_6 = \frac{2\pi^6}{945} (1 - 504q - 16632q^2 - 122976q^3 - 532728q^4 - 1575504q^5 - \dots).$$

Zunächst ist $\sigma_k(d)$ schwach multiplikativ, d.h. $\sigma_k(m \cdot n) = \sigma_k(m) \cdot \sigma_k(n)$ falls $\operatorname{ggT}(m, n) = 1$ und für Primpotenzen hat man die einfache Formel

$$\sigma_k(p^s) = \frac{p^{(s+1)k} - 1}{p^k - 1}.$$

Es ist

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} \cdot (q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + 4830q^5 - 6048q^6 - 16744q^7 + 84480q^8 - 113643q^9 + \dots).$$

Ramanujan vermutete $\tau(m \cdot n) = \tau(m) \cdot \tau(n)$ und für p -Potenzen die Formel

$$\tau(p^s) = \tau(p) \cdot \tau(p^{s-1}) - p^{11} \cdot \tau(p^{s-2})$$

für $s \geq 2$. Dies wurde von Hecke mit Hilfe von Abbildungen, den sogenannte Hecke-Operatoren, gezeigt.

Auf Ramanujan gehen auch Vermutungen von Kongruenzen zurück, so z.B.

$$\tau(d) \equiv \sigma_{11}(d) \pmod{691} \quad \text{bzw.} \quad \tau(7d+3) \equiv 0 \pmod{7}.$$

Ramanujans wichtigste Vermutung betrifft das Wachstum von $\tau(d)$. Die Fourier-Koeffizienten der Eisensteinreihe G_k wachsen wie d^{k-1} , denn

$$d^{k-1} \leq \sigma_{k-1}(d) < \zeta(k-1) d^{k-1}.$$

Ramanujan vermutete, dass $|\tau(p)| \leq 2p^5 \sqrt{p}$. Die schwächere Aussage, dass es ein C gibt, so $|\tau(p)| \leq C \cdot p^6$ werden wir später noch beweisen. Ramanujans Vermutung, d.h. mit Exponent $11/2$, wurde erst 1974 von Deligne bewiesen. Es ist Konsequenz seines berühmten Beweises der Weil-Vermutungen, die die Anzahl von Punkten einer algebraischen Varietät über endlichen Körper abschätzt.

Schließlich ist

$$j(\tau) = q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 \\ + 20245856256q^4 + 333202640600q^5 + \dots$$

Schon anhand weniger Koeffizienten erahnt man, dass die Größe des d -ten Fourierkoeffizienten j_d der j -Funktion nicht polynomial in d , sondern schneller wächst. In der Tat gilt für $d \rightarrow \infty$

$$j_d \sim \frac{e^{4\pi\sqrt{d}}}{\sqrt{2}d^{3/4}},$$

was von Peterson und Rademacher in den 30ern bewiesen wurde. Während diese Asymptotik wichtige Anwendungen hat, sind Kongruenzaussage für die Koeffizienten j_d eher Zahlenspielererei. Dennoch ist es überraschend, dass z.B. folgender Satz von Lehner gilt. Für $d \equiv 0 \pmod{2^u 3^v 5^w 7^x}$ ist

$$j_d \equiv 0 \pmod{2^{3u+8} 3^{2v+3} 5^{w+1} 7^x}.$$

3 Modulformen

Wir hatten gesehen, dass zwei Basen $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ und $\{\lambda'_1, \lambda'_2\}$ dasselbe Gitter Λ bestimmen, genau dann, wenn es $A \in GL_2(\mathbb{Z})$ mit $A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \end{pmatrix}$ gibt. Seien $\{\tau = \lambda_1/\lambda_2, 1\}$ und $\{\tau' = \lambda'_1/\lambda'_2, 1\}$ die Basen des zugehörigen äquivalenten Gitters. Ist τ in \mathbb{H} , so ist $\tau' \in \mathbb{H}$, falls $\det A = +1$ und $\tau' \in \mathbb{H}^-$, falls $\det A = -1$. Nennen wir λ_1, λ_2 positiv orientiert, falls $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{H}$, so können wir festhalten, dass zwei positiv orientierte Gitterbasen dasselbe Gitter bestimmen, falls sie durch eine $SL_2(\mathbb{Z})$ -Transformation auseinander hervorgehen. Ist $A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, so ist

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} =: A \cdot \tau.$$

Wir betrachten das Transformationsverhalten der Eisensteinreihen $G_k(\tau)$ unter dieser Transformation. Es ist für $k > 2$

$$\begin{aligned}
G_k(A\tau) &= \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} (m(A\tau) + n)^{-k} = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \left(m \frac{a\tau+b}{c\tau+d} + n\right)^{-k} \\
&= (c\tau + d)^k \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} ((am + cn)\tau + (bm + dn))^{-k} \\
&= (c\tau + d)^k \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} (m\tau + n)^{-k} \\
&= (c\tau + d)^k G_k(\tau),
\end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass das Bild von $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ unter einer Matrix in $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ wieder $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist und dass wir aufgrund der absoluten Konvergenz die Summationsreihenfolge vertauschen können. Eisensteinreihen sind also die ersten Beispiele von Funktionen mit einem Transformationsverhalten, das Modulformen definiert. Vor einer systematischen Analyse betrachten wir zunächst die Aktion von $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf \mathbb{H} .

3.1 Möbiustransformation und die Modulgruppe $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$

Ist $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$, so definiert $\tau \mapsto M\tau = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ eine biholomorphe Bijektion der oberen Halbebene \mathbb{H} in sich. Die Umkehrabbildung ist durch M^{-1} gegeben und es gilt für $M, N \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ die Beziehung $M \cdot (N \cdot \tau) = (M \cdot N) \cdot \tau$, sodass obige Vorschrift eine Aktion der Gruppe $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ auf \mathbb{H} definiert. Wir behaupten, dass diese Aktion transitiv ist, d.h. zu jedem $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{H}$ gibt es ein $M \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ mit $M \cdot \tau_1 = \tau_2$. Dazu genügt es zu zeigen, dass es zu jedem $\tau = x + iy \in \mathbb{H}$ ein M gibt mit $M \cdot i = \tau$. Die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix}$$

leistet dies offenbar.

Als Untergruppe von $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ operiert natürlich auch die Modulgruppe $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf \mathbb{H} . Diese Operation ist nicht transitiv und wir wollen den Bahnenraum beschreiben. Zunächst etwas Gruppentheorie. In $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ gibt es zwei Elemente, die wir immer wieder verwenden,

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist $S^2 = -I_2$, d.h. S hat Ordnung 4, und $ST = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ hat die Eigenschaft $(ST)^3 = -I_2$, also hat ST Ordnung 6.

Proposition 3.1 *Die Modulgruppe wird von S und T erzeugt.*

Beweis : Sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach $|c|$. Ist $c = 0$, so ist $M = \pm T^b$ und damit in der von S und T erzeugten Untergruppe. Da a und c teilerfremd sind, gibt es ein $m \in \mathbb{Z}$, sodass $c' = a + mc$ betragskleiner als c ist. Außerdem ist

$$M' = ST^m M = \begin{pmatrix} * & * \\ c' & * \end{pmatrix}$$

und wir können M' nach Induktionsvoraussetzung als Produkt von $S^{\pm 1}$ und $T^{\pm 1}$ schreiben. \square

Ein *Fundamentbereich* für die Aktion einer Gruppe G auf einer Menge X ist ein Vertretersystem F der Bahnen. Ist X ein topologischer Raum, so verlangt man manchmal, dass F zusammenhängend oder, dass F im Abschluß seines Inneren enthalten ist (oder beides), aber dies ist in der Literatur nicht einheitlich. Der Fundamentbereich F im folgenden Satz hat offenbar beide Eigenschaften.

Proposition 3.2 *Ein Fundamentbereich für die Aktion von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf \mathbb{H} ist*

$$F = \left\{ \tau \in \mathbb{H} : -\frac{1}{2} < \mathrm{Re} \tau \leq \frac{1}{2}, |\tau| \geq 1 \text{ und } |\tau| > 1, \text{ falls } -\frac{1}{2} < \mathrm{Re} \tau < 0 \right\}.$$

Dabei sind die Eckpunkte $\rho = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$ und ρ^2 .

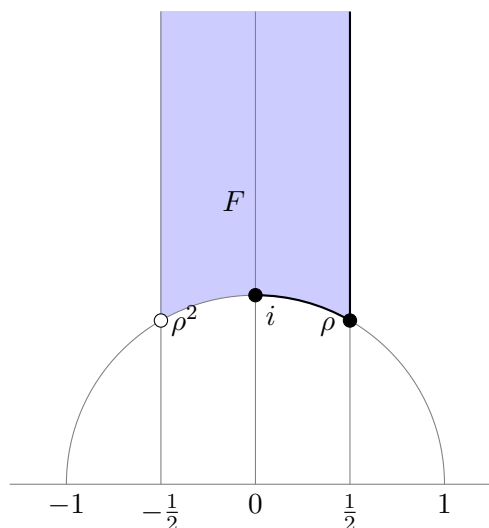
Beweis : Wir hatten bereits in Lemma 2.9 gezeigt, dass jedes Gitter der Form $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}1$ eine Basis mit $\tau \in \overline{F}$ hat. Ist $\mathrm{Re}(\tau) = -\frac{1}{2}$, so ist $\mathrm{Re}(T \cdot \tau) = +\frac{1}{2}$. Ist $|\tau| = 1$ und $\mathrm{Re}(\tau) < 0$, so hat $S \cdot \tau$ positiven Realteil und ebenfalls $|S \cdot \tau| = 1$. Also hat jede Bahn einen Vertreter in F . Es ist noch zu zeigen, dass $M \cdot \tau \in F$ für $\tau \in F$ und $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ die Gleichheit $M \cdot \tau = \tau$ impliziert. Ist $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $c = 0$, so gilt die Behauptung offenbar. Andernfalls sei $\tau = x + iy$. Dann ist

$$\mathrm{Im} M\tau = \frac{y}{|c\tau + d|^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad y \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Wir zeigen zunächst $c = 1$. Nach der Dreiecksungleichung ist $|c\tau + d|^2 \geq c^2 y^2$, also zusammen mit obiger Gleichung $\frac{3}{4}c^2 \leq 1$ und damit $c = 1$, wie behauptet. Weiter ist

$$|\tau + d|^2 = (x + d)^2 + y^2 \geq 2|x + d| \cdot y, \quad \text{also} \quad \sqrt{3}|x + d| \leq 1$$

und wegen $|x| \leq \frac{1}{2}$ folgt $d \in \{0, 1, -1\}$. Diese Fälle muss man nun einzeln abarbeiten.



Fall $d = 0$: Dann ist $M\tau = m - 1/\tau$ für ein $m \in \mathbb{Z}$. Wenn $|\tau| > 1$, so ist $|\operatorname{Re}(-1/\tau)| = |\operatorname{Re}(\tau)|/|\tau|^2 < 1/2$. Damit ist $m = 0$ und $|M(\tau)| = |1/\tau| < 1$. Das ist ein Widerspruch. Es bleibt $|\tau| = 1$, also $M\tau = m - \bar{\tau} = (m - x) + iy$. Dann bleibt nur $m = 0$ und $\tau = i$, sowie $m = 1$ und $\tau = \rho$.

Fall $d = \pm 1$: Nun ist $|\tau + d|^2 = (x + 1)^2 + y^2 \geq y^2 + \frac{1}{4}$, also $\frac{1}{2}\sqrt{3} \leq \operatorname{Im} M\tau \leq \frac{y}{y^2 + \frac{1}{4}}$. Die obere Schranke ist für $y > 1/2\sqrt{3}$ streng monoton fallend und nimmt für $y = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ den Wert $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ an. Also ist $\operatorname{Im} M\tau = y = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, folglich $x = \frac{1}{2}$ und $\tau = M\tau = \rho$. \square

Aufgabe 3.1 (5 Punkte)

Eine Linkswirkung einer Gruppe G auf einem topologischen Raum X ist eine Abbildung

$$\phi : G \times X \rightarrow X$$

sodass $\phi(e, x) = x$ für alle $x \in X$ und $\phi(g \cdot h, x) = \phi(g, \phi(h, x))$ für alle $h, g \in G$ und $x \in X$.

Die Wirkung heißt:

- *Transitiv* wenn es für alle $x, y \in X$, ein $g \in G$ gibt, sodass $\phi(g, x) = y$.
- *Treu* wenn es für alle $g, h \in G$, ein $x \in X$ gibt, sodass $\phi(g, x) \neq \phi(h, x)$.
- *Frei* wenn für alle $x \in X$ gilt: $\{g \in G : \phi(g, x) = x\} = \{e\}$.

Sei $\operatorname{PSL}_2(\mathbb{R}) := \operatorname{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm \operatorname{Id}\}$. Beweisen Sie dass

i) Die Abbildung

$$\phi : \operatorname{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \quad \phi \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) = \frac{az + b}{cz + d}$$

eine transitive, treue aber nicht freie Wirkung ist.

ii) Sei

$$\operatorname{Stab}(i) := \{A \in \operatorname{PSL}_2(\mathbb{R}) : \phi(A, i) = i\}$$

der Stabilisator von $i \in \mathbb{H}$. Beweisen Sie, dass

$$\operatorname{Stab}(i) = \operatorname{PSO}_2(\mathbb{R}),$$

wobei $\operatorname{PSO}_2(\mathbb{R}) = \operatorname{SO}_2(\mathbb{R})/\{\pm \operatorname{Id}\}$ und

$$\operatorname{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\}.$$

iii) Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$\operatorname{PSL}_2(\mathbb{R})/\operatorname{PSO}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{H}, \quad A \cdot \operatorname{PSO}_2(\mathbb{R}) \mapsto \phi(A, i)$$

eine Homeomorphismus ist.

iv) Zeige: Jede Matrix $g \in G$ besitzt eine *Iwasawa-Zerlegung*, d.h. für jedes $g \in G$ existieren $a \in A$, $n \in N$ und $k \in K$ mit $g = ank$. Dabei ist

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, a > 0 \right\} \quad \text{und} \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Insbesondere gilt also $G = ANK$.

Aufgabe 3.2 (6 Punkte)

Wir betrachten nun die eingeschränkte Operation von $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf \mathbb{H} . Sei

$$\bar{F} = \{\tau \in \mathbb{H} \mid |\tau| \geq 1 \text{ und } |\mathrm{Re} \tau| \leq \frac{1}{2}\}$$

der Abschluss des aus der Vorlesung bekannten Fundamentalbereichs. Sei zudem $\rho = e^{2\pi i/6}$.

- i) Zeige: Für alle $\tau \in \bar{F} \setminus \{i, \rho, \rho^2\}$ gilt für den Stabilisator: $\Gamma_\tau = \{\pm 1\}$.

Zeige außerdem: In den übrigen drei Fällen ist der Stabilisator zyklisch und endlich. Gib die Ordnungen und jeweils einen Erzeuger (in Abhängigkeit von S und T) an.

Hinweis: Zeige zunächst: $\mathrm{Im} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \tau = \frac{\mathrm{Im} \tau}{|c\tau + d|^2}$. Was bedeutet das für $|c|$?

- ii) Seien nun $\Lambda_i = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ und $\Lambda_\rho = \mathbb{Z} + \rho\mathbb{Z}$ die zu i und ρ gehörigen Gitter.

Zeige: $g_3(i) = 0$ und $g_2(\rho) = 0$.

Hinweis: Zeige zunächst: $i\Lambda_i = \Lambda_i$ und $\rho\Lambda_\rho = \Lambda_\rho$.

- iii) Folgere, dass $j(i) = 1728$ und $j(\rho) = 0$ ist.

Aufgabe 3.3 (6 Punkte)

Für $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $\pi_n : \Gamma \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ die kanonische Projektion. Wir nennen $\Gamma[n] = \mathrm{Kern} \pi_n$ die Hauptkongruenzgruppe (mod n).

- i) Zeige: π_n ist surjektiv und somit ist $\Gamma[n]$ stets ein Normalteiler von endlichem Index.

Hinweis: Zeige zunächst: Für $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $c \neq 0$ und $\mathrm{ggT}(a, b, c) = 1$ gibt es ein $x \in \mathbb{Z}$, so dass $\mathrm{ggT}(a + xb, c) = 1$.

- ii) Zeige: Für $n \geq 2$ operiert $\Gamma[n]$ fixpunktfrei auf \mathbb{H} , d.h. für alle $\tau \in \mathbb{H}$ ist $\Gamma[n]_\tau = \{\pm 1\}$ für $n = 2$ und sogar trivial für $n > 2$.

Hinweis: Aufgabe 2(a).

- iii) Gib ein Vertretersystem der Nebenklassen von $\Gamma[2]$ in Γ an.

Hinweis: Wie viele Elemente hat $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$?

Aufgabe 3.4 (6 Punkte)

- i) Zeige: Für $N \in \mathbb{N}$ ist

$$\#\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) = N^3 \prod \left(1 - \frac{1}{p^2}\right),$$

wobei das Produkt über alle Primteiler p von N läuft.

Hinweis: Zeige zunächst, dass für jede Primzahl p und $e \in \mathbb{N}$

$$\#\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}) = p^{3e} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

gilt. Dabei hilft vielleicht Aufgabe 3(a) vom Übungsblatt 3.

- ii) Zeige: $\Gamma_0[N]/\Gamma_1[N] \cong (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ und $\Gamma_1[N]/\Gamma[N] \cong \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Hinweis: Wähle eine Projektion auf eine geeignete Koordinate.

- iii) Zeige: Für den Index von $\Gamma_0[N]$ in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt

$$[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0[N]] = N \prod \left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

wobei p die Primteiler von N durchläuft.

3.2 Einschub: Holomorphe Funktionen auf Kreisingen

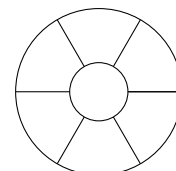
Im Abschnitt 2.5 hatten wir bereits Fourierentwicklungen der Eisensteinreihen untersucht. Wir wollen Modulformen als Funktionen auf der oberen Halbebene mit einem Transformationsverhalten wie Eisensteinreihen und einer gutartigen Fourierentwicklung definieren. Fourierentwicklungen definieren wir nun allgemein für eine merkmorphe Funktion $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Translationsinvariant $f(\tau + 1) = f(\tau)$, welche auf einer Menge $\{\text{Im } \tau > C\}$ für ein geeignetes C holomorph ist. Die Abbildung $q = q(\tau): \mathbb{H} \rightarrow \Delta^*$, $\tau \mapsto e^{2\pi i \tau}$ ist holomorph und auf kleinen Kreisscheiben, die in der geschlitzten Kreisscheibe liegen, auch invertierbar. D.h. auf der (kleinen) punktierten Kreisscheibe Δ_s^* , wobei $s = e^{2\pi C}$, ist $g(z) = f(q^{-1}(z))$ lokal wohldefiniert und holomorph. Wegen der Periodizität von f ist diese Funktion also global auf Δ_s^* definiert und holomorph. Dies ist also eine Instanz der folgenden, allgemeineren Situation.

Sei $K_{r,s}(a) = \{z \in \mathbb{C}: r < |z - a| < s\}$ der Kreisring um a mit Innenradius r und Außenradius s . Dabei ist $r = 0$ oder $s = \infty$ zugelassen. Ohne Argument schreiben wir $K_{r,s}$ für den Kreisring um Null und beschränken uns nun auf diesen Fall. Es ist $K_{r,s} = A^+ \cap A^-$, wobei $A^+ = A_s^+ = B_s(0)$ und $A^- = A_r^- = \{z \in \mathbb{C}: |z| > r\}$. Auf Kreisringen gilt folgende Version des Cauchyschen Integralsatzes.

Proposition 3.3 *Ist g holomorph auf $K_{r,s}$, so gilt für alle $r < \rho \leq \sigma < s$*

$$\int_{\partial B_\rho} g dz = \int_{\partial B_\sigma} g dz.$$

Der Beweis folgt aus der Version für Sterngebiete durch Zerlegung des Kreisrings in Segmente wie im Bild gezeichnet.



Die Cauchy-Integralformel spezialisiert sich für Kreisringe zu

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_{r,s}} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_s} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

für alle $z \in K_{r,s}$. Die wesentliche funktionentheoretische Aussage über Kreisringe macht der folgende Satz.

Satz 3.4 *Sei g auf $K_{r,s}$ holomorph und*

$$g^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{für ein geeignetes } |z| < \rho < s,$$

$$g^-(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{für ein geeignetes } |z| > \rho > r.$$

Dann ist g^+ holomorph auf A^+ , es ist g^- holomorph auf A^- , $\lim_{z \rightarrow \infty} g^-(z) = 0$ und $g = g^+ + g^-$.
 Durch diese vier Eigenschaften sind g^+ und g^- eindeutig bestimmt.

Die Funktion g^+ in diesem Satz schreiben wir als Potenzreihe

$$g^+(z) = \sum_{d=0}^{\infty} a_d z^d.$$

Mit dem Koordinatenwechsel $w = 1/z$ ist $g^-(w)$ nun auf $B_{1/r}(0)$ definiert und holomorph.
 Es ist also

$$g^-(w) = \sum_{d=1}^{\infty} b_d w^d,$$

wobei die Reihe wegen $\lim_{z \rightarrow \infty} g^-(z) = 0$ bei $d = 1$ beginnt. Wir setzen $a_d = b_{-d}$ für $d < 0$.
 Damit ist also

$$g(z) = \sum_{d=-\infty}^{+\infty} a_d z^d.$$

Diese Reihe, welche auf $K_{r,s}$ konvergent ist, wird die *Laurentreihe* von g genannt. Aus der Cauchy-Integralformel folgt

$$a_d = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho} \frac{g(\zeta)}{\zeta^{d+1}} d\zeta, \quad r < \rho < s. \quad (3.1)$$

Beweis von Satz 3.4 : Die Holomorphie von g^+ auf A^+ wurde in [FTDgl, Lemma 7.6], gezeigt. Durch die Variablentransformation $w = 1/z$ führt man die Holomorphie von g^- auf A^- auf diese Aussage zurück. Die Zerlegung $g = g^+ + g^-$ folgt aus der Cauchy-Integralformel.
 Aus

$$2\pi |g^-(z)| \leq \rho \cdot \max_{\zeta \in \partial B_\rho} \left| \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)} \right| \leq \frac{\rho}{|z| - \rho} \|g\|_{\infty, \partial B_\rho}$$

folgt die Limesaussage für $z \rightarrow \infty$. Ist $g = h^+ + h^-$ eine weitere solche Darstellung, so ist $g^+ - h^+ = g^- - h^-$ holomorph auf $A^+ \cup A^- = \mathbb{C}$, also konstant und wegen der Limesbedingung gleich Null. \square

Der vorige Satz besagt also, dass eine unter $\tau \mapsto \tau + 1$ periodische Funktion $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Fourierentwicklung

$$f(\tau) = \sum_{d=-\infty}^{+\infty} a_d q^d$$

besitzt. Die Koeffizienten sind wegen (3.1) für alle $y > 0$ durch

$$a_d = \int_0^1 f(x + iy) e^{-2\pi i d(x+iy)} dx$$

gegeben. Man sagt, dass solche eine Funktion $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ höchstens einen Pol bei ∞ hat, falls die Fourierentwicklung von f höchstens endlich viele negative Terme besitzt, falls also

$$f(\tau) = \sum_{d=d_0}^{+\infty} a_d q^d$$

ist.

3.3 Meromorphe Modulformen

Definition 3.5 Eine meromorphe Funktion $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt meromorphe Modulform von Gewicht k , falls

$$f|_k M := (c\tau + d)^{-k} f(M\tau) = f(\tau) \quad \text{für} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

gilt und falls f bei ∞ höchstens einen Pol hat.

Die Menge der meromorphen Modulformen zu fixiertem Gewicht k bildet einen Vektorraum. Ist k ungerade, so ist wegen $M = -E \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Modulform Null, denn $f(M \cdot z) = f(z) = (-1)^k f(z)$. Aus der einleitenden Rechnung dieses Abschnitts und Satz 2.23 folgt, dass die Eisensteinreihen G_k meromorphe Modulformen vom Gewicht k sind. Sind f und g Modulformen vom Gewicht k bzw. ℓ , so ist $f \cdot g$ eine Modulform vom Gewicht $k + \ell$. Ist $g \neq 0$ vom Gewicht k , so ist $\frac{1}{g}$ eine meromorphe Modulform vom Gewicht $-k$.

Die direkte Summe der Vektorräume meromorpher Modulformen, über alle Gewichte k , bilden also einen Körper. Fast alle interessanten Beispiele, die wir im Zusammenhang mit der \wp -Funktion kennengelernt haben, d.h. die Eisensteinreihen und die Diskriminante Δ (aber nicht die j -Funktion), liegen im folgenden Unterring.

Definition 3.6 Eine holomorphe Funktion $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt (ganze) Modulform vom Gewicht k , falls

$$f|_k M = f \quad \text{für} \quad M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

und es ein $C > 0$ gibt, sodass f auf $\{\mathrm{Im} \tau > C\} \subseteq \mathbb{H}$ beschränkt ist.

In der letzten Bedingung kann man aufgrund der T -Invarianz „für ein $C > 0$ “ äquivalent durch „für alle $C > 0$ “ ersetzen, da für alle $C > C' > 0$ die Menge $[0, 1] \times [C', C]$ kompakt ist. Die Bedingung ist äquivalent dazu, dass f eine Fourier-Entwicklung

$$f = \sum_{d \geq 0} a_d q^d$$

besitzt, die eine Potenzreihe ist. Daher nennen wir f in dem Fall *holomorph bei ∞* .

Proposition 3.7 *Ist f eine Modulform vom Gewicht $k < 0$, so ist $f = 0$.*

Beweis : Zu f betrachtet man den gewichteten Realteil

$$\tilde{f}(\tau) = (\operatorname{Im} \tau)^{k/2} |f(\tau)|.$$

Es gilt $\operatorname{Im} M\tau = \frac{\operatorname{Im} \tau}{|c\tau + d|^2}$. Daher ist diese reellwertige Funktion $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ -invariant. Da f auf $\operatorname{Im} \tau > \sqrt{3}/2$ beschränkt ist und k negativ, ist auch \tilde{f} dort beschränkt. Also ist \tilde{f} auf dem ganzen Fundamentalbereich und somit auf ganz \mathbb{H} beschränkt. Für die Fourier- Koeffizienten gilt nun für alle $d \geq 0$ und unabhängig von $y \in \mathbb{R} > 0$

$$a_d = e^{2\pi dy} \int_0^1 f(x + iy) e^{-2\pi dx} dx.$$

Aus der Definition von \tilde{f} und deren Beschränktheit folgt

$$|a_d| \leq y^{-k/2} e^{2\pi dy} \int_0^1 \tilde{f}(x + iy) |e^{-2\pi dx}| dx \leq C \cdot y^{-k/2} e^{2\pi dy}.$$

Für $k < 0$ ist der Limes der rechten Seite für $y \rightarrow 0$ gleich Null für jedes d und daraus folgt die Behauptung. \square

Die (ganzen) Modulformen vom Gewicht k bilden einen Vektorraum, den wir mit M_k bezeichnen, oder auch $M_k(\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}))$, wenn wir die Gruppe betonen wollen bezüglich der das Modultransmutationsverhalten gültig ist. Offenbar ist $M_k \cdot M_\ell \subseteq M_{k+\ell}$, sodass $M = \bigoplus_{k \geq 0} M_k$ ein (graduierter) Ring, der Ring der (ganzen) Modulformen, ist.

Das nächste Ziel ist es, die Struktur von M und die Dimension von M_k zu bestimmen. Dazu machen wir zunächst zwei Vorbemerkungen zu Nullstellenordnungen.

Lemma 3.8 *Ist f meromorph auf \mathbb{H} und $M \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$, so gilt für alle $\tau_0 \in \mathbb{H}$:*

$$\operatorname{ord}_{\tau_0} f|_k M = \operatorname{ord}_{M^{-1}\tau_0} f.$$

Insbesondere ist für eine meromorphe Modulform f vom Gewicht k

$$\operatorname{ord}_{\tau_0} f = \operatorname{ord}_{M^{-1}\tau_0} f \quad \text{für alle } M \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Beweis : Wir schreiben $f(\tau) = (\tau - \tau_0)^n g(\tau)$, wobei $g(\tau)$ meromorph aber holomorph bei τ_0 und $g(\tau_0) \neq 0$ ist, also ist $(g \circ M)(M^{-1}\tau_0) \neq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} (f|_k M)(\tau) &= (c\tau + d)^{-k} (M\tau - MM^{-1}\tau_0)^n g(M\tau) \\ &= (c\tau + d)^{-k} (M(\tau - M^{-1}\tau_0))^n g(M\tau) \end{aligned} \tag{3.2}$$

und die Behauptung folgt wenn man τ gegen $M^{-1}\tau_0$ laufen lässt, da $c\tau + d$ weder Null- noch Polstellen in \mathbb{H} hat und da die Aktion von M ein Biholomorphismus ist, also eine einfache Nullstelle auf eine einfache Nullstelle abbildet. \square

Wir definieren noch die *Ordnung eines Punktes* $\tau \in F$ durch $\text{ord}(\rho) = 3, \text{ord}(i) = 2$ und $\text{ord}(\tau) = 1$ für alle anderen Punkte. Dies ist genau die Hälfte der Ordnung der Untergruppe in $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$, die den jeweiligen Punkt fixiert. (Man halbiert die Ordnung, da $-E$ jeden Punkt fixiert, d.h. trivial auf \mathbb{H} operiert). Wir definieren außerdem $F^* = F \cup \{\infty\}$ und $\text{ord}_\infty f$ als $\min\{d : a_d(f) \neq 0\}$, wobei $a_d(f)$ die Fourierkoeffizienten von f sind und $\text{ord}(\infty) = 1$. Ziel des Abschnitts ist folgender Satz.

Satz 3.9 Ist $f \in M_k$ nicht die Nullfunktion, so gilt $\sum_{\tau \in F^*} \frac{\text{ord}_\tau(f)}{\text{ord}(\tau)} = \frac{k}{12}$.

Beweis : Die Methode ist analog zum Beweis von Proposition 2.15 und Korollar 2.16. Wir setzen $F = f'/f$ und erhalten $\text{Res}_{\tau_0} F = \text{ord}_{\tau_0} f$. Sei nun D die abgeschlossene Menge, die man erhält, wenn man aus \bar{F} Kugeln vom Radius ε um alle Nullstellen von f , die „Umgebung bei Unendlich“ $\text{Im } \tau > \varepsilon^{-1}$ sowie Kugeln vom Radius ε um ρ, ρ^2 und i entfernt. Dabei ist ε so klein gewählt, dass die Kugeln jeweils nur eine Nullstelle von f bzw. neben i, ρ, ρ^2 keine Nullstelle von f enthalten. Dabei verwenden wir, dass aufgrund des Identitätssatzes für holomorphe Funktionen die Imaginärteile von Nullstellen von f nach oben beschränkt ist.

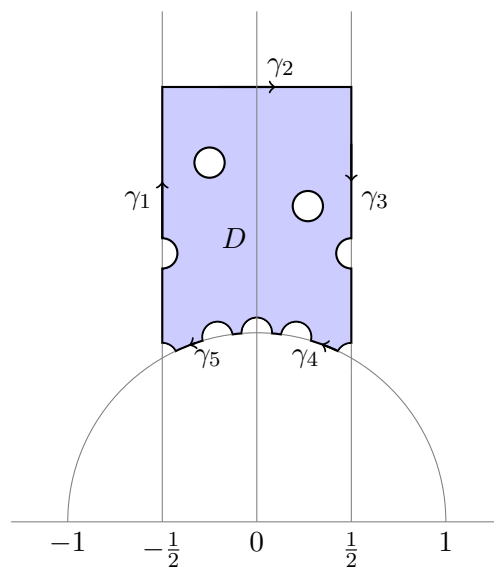
Sei $\gamma = \partial D$ im Uhrzeigersinn durchlaufen. Wir wissen, dass $0 = \int_\gamma F$ ist und zerlegen das Integral in seine Teilstücke.

Die beiden vertikalen Teilstücke liefern keinen Beitrag, denn F ist auf beiden Stücken identisch und diese werden entgegengesetzt durchlaufen. Fehlende Teilstücke durch etwaige Nullstellen von f ergänzen sich zu ε -Kugeln um alle Nullstellen von f . Das Bild des oberen Randes γ_2 unter $\tau \mapsto q(\tau)$ ist ein Kreis um 0. Ist $f = \sum_{d \geq d_0} a_d q^d$, so ist $f' = \sum_{d \geq d_0} 2\pi i d a_d q^d$, also hat F die Fourier-Reihe $F = 2\pi i d_0 + \sum_{d \geq 1} b_d q^d$ für gewisse b_d und

$$\int_{\gamma_2} F = \int_{\tilde{\gamma}_2} F \frac{dq}{2\pi i q} = 2\pi i d_0 = 2\pi i \cdot \text{ord}_\infty(f),$$

wobei $\tilde{\gamma}_2$ das Bild von Γ im punktierten Einheitskreis ist, ein Weg um den Nullpunkt mit Windungszahl Eins.

Der Weg um die kleinen Kugeln um τ_0 liefert jeweils $2\pi i \text{ord}_{\tau_0}(f) / \text{ord}(\tau_0)$ nach dem Residuensatz und der Tatsache, dass das Integral von $1/z$ um $1/k$ -tel eines Kreises $2\pi i/k$ ist. Es



bleibt noch der Beitrag der Wege γ_4 und γ_5 auf dem Rand des Einheitskreises zu bestimmen. Dazu leiten wir den Logarithmus der Transformationsgleichung von f ab und erhalten

$$\frac{d}{d\tau} \log(f(M\tau)) = F(M\tau) \cdot \frac{dM}{d\tau}(\tau) = k \frac{c}{c\tau + d} + F(\tau).$$

Da $-\gamma_5 = S\gamma_4$ spezialisieren wir auf $M = S$ und erhalten (da $-S = S^{-1}$)

$$\int_{S\gamma_4} F(\tau) d\tau = \int_{\gamma_4} F(S\tau) \frac{dS}{d\tau}(\tau) d\tau = k \cdot \int_{\gamma_4} \frac{d\tau}{\tau} + \int_{\gamma_4} F(\tau) d\tau$$

und damit

$$\int_{\gamma_4} F(\tau) d\tau + \int_{\gamma_5} F(\tau) d\tau = -k \int_{\rho}^i \frac{d\tau}{\tau} = -\frac{2\pi i k}{12}.$$

Zusammensetzen der Beiträge und Division durch $2\pi i$ ergibt die gesuchte Formel. \square

Aus der Gewichtformel folgt zunächst $M_0 \cong \mathbb{C}$, denn wäre $f \in M_0$ nicht-konstant, so ergibt die Gewichtformel auf $f - f(i)$ angewandt einen Widerspruch.

Wir schreiben die Konsequenz dieses Satzes für kleines k auf, d.h. versuchen

$$\frac{1}{2} \text{ord}_i f + \frac{1}{3} \text{ord}_\rho f + \text{ord}_\infty f + \sum_{z \in \mathcal{F} \setminus \{i, \rho\}} \text{ord}_z f = \frac{k}{12}$$

in ganzen Zahlen zu lösen. Bis $k = 10$ einschließlich ist dies eindeutig.

k	$k/12$	$\text{ord}_i f$	$\text{ord}_\rho f$	$\text{ord}_\infty f$	$\sum \text{ord}_z f$
2	1/6	keine Lösung			
4	1/3	0	1	0	0
6	1/2	1	0	0	0
8	2/3	0	2	0	0
10	5/6	1	1	0	0

(3.3)

Korollar 3.10 *Der Raum der Modulformen in kleinem Gewicht ist wie folgt erzeugt: Für $k = 2$ ist $M_k = \{0\}$. Für $k = 4$ ist $M_4 = \mathbb{C} \cdot G_4$ und G_4 hat eine einfache Nullstelle bei ρ . Für $k = 6$ ist $M_6 = \mathbb{C} \cdot G_6$ und G_6 hat eine einfache Nullstelle bei i . Für $k = 8$ ist $M_8 = \mathbb{C} \cdot G_4^2 = \mathbb{C} \cdot G_8$ und für $k = 10$ ist $M_{10} = \mathbb{C} \cdot (G_4 \cdot G_6) = \mathbb{C} \cdot G_{10}$.*

Beweis : Wir wissen, dass $G_4 \in M_4$ ist und nach der Tabelle die geforderte Nullstelle besitzt. Ist $f \in M_k$, so ist $f/G_4 \in M_0$, also konstant. Für alle anderen k funktioniert der gleiche Schluss. \square

Für $k = 8$ erhält man genauso $7G_8 = 3G_4^2$ und damit durch Koeffizientenvergleich die interessante Hurwitz-Identität

$$\sigma_7(d) = \sigma_3(d) + 120 \sum_{\substack{r+s=d \\ r,s \in \mathbb{N}}} \sigma_3(r) \sigma_3(s).$$

Modulformen, die bei ∞ verschwinden, werden *Spitzenformen* genannt. Mit $S_k \subseteq M_k$ bezeichnen wir den Untervektorraum dieser Spitzenformen. Aus der Tabelle folgt, dass $S_k = \{0\}$ für $k < 12$. Wir haben bereits die Fourierentwicklung von Δ ausgerechnet und damit gesehen, dass $\Delta \in S_{12}$ ist. Aus der Gewichtsformel folgt also, dass Δ auf \mathbb{H} nirgends verschwindet. Offenbar ist $S_k \cdot M_\ell \subseteq S_{k+\ell}$. Ist umgekehrt $f \in S_k$, so ist f/Δ a priori meromorph vom Gewicht $k - 12$. Genauer betrachtet ist aber f/Δ holomorph bei ∞ , denn die Fourierentwicklungen von Zähler und Nenner beginnen mit dem q -Term. Da Δ auf \mathbb{H} keine Nullstellen hat, folgt also $f/\Delta \in M_{k-12}$, also

$$S_k = \Delta \cdot M_{k-12}.$$

Daraus leiten wir folgenden Satz ab.

Satz 3.11 Für $k \geq 0$ ist $\dim M_k = \lfloor k/12 \rfloor$, falls $k \equiv 2 \pmod{12}$, und $\dim M_k = \lfloor k/12 \rfloor + 1$, falls $k \not\equiv 2 \pmod{12}$.

Beweis : Für $k < 12$ haben wir die Aussage bereits bewiesen und für $k \geq 12$ gilt offenbar

$$\dim M_k = \dim S_k + 1 = \dim M_{k-12} + 1.$$

Da die angegebene Formel auch dieser Rekursion genügt, haben wir sie für alle $k \in \mathbb{N}$ bewiesen. \square

Der Raum aller Modulformen $M = \bigoplus_{k \geq 0} M_k$ ist ein Ring und ein \mathbb{C} -Vektorraum, also eine \mathbb{C} -Algebra. Die Eigenschaft $M_k \cdot M_\ell \subseteq M_{k+\ell}$ besagt per Definition, dass M eine *graduierete Algebra* ist.

Nachdem wir die Vektorraumstruktur (d.h. Dimensionen) kennen, wollen wir die Algebrenstruktur bestimmen. Sicher brauchen wir dazu G_4 , denn die ist die nicht-konstante Modulform kleinsten Gewichts. Auch benötigen wir G_6 , denn G_4^2 hat bereits Gewicht 8. Diese beiden Erzeuger genügen bereits.

Satz 3.12 Die Eisensteinreihen G_4 und G_6 erzeugen die \mathbb{C} -Algebra der Modulformen. Genauer ist

$$M = \bigoplus_{r,s \in \mathbb{N}} \mathbb{C} \cdot G_4^r \cdot G_6^s, \text{ d.h. } M_k = \bigoplus_{k=4r+6s} \mathbb{C} \cdot G_4^r \cdot G_6^s.$$

Beweis : Für die Gewichte $4 \leq k \leq 12$ haben wir die Aussage in der Tabelle (3.3) explizit gesehen und $M_{14} = \mathbb{C} \cdot G_4^2 G_6$. Sei nun $k > 14$. Dann gibt es eine Lösung von $k = 4r_0 + 6s_0$ mit $r_0, s_0 \in \mathbb{N}$. Also ist $G_4^{r_0} G_6^{s_0}$ eine Modulform vom Gewicht k , die keine Spitzenform ist. Also ist

$$M_k = \mathbb{C} \cdot G_4^{r_0} G_6^{s_0} \oplus (G_4^3 - G_6^2) \cdot M_{k-12}.$$

Daraus folgt per Induktion, dass G_4 und G_6 die Algebra erzeugen. Die Behauptung über die direkte Summe folgt, wenn man gezeigt hat, dass für alle k

$$\#\{(r, s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 4r + 6s = k\} = \begin{cases} \lfloor k/12 \rfloor & k \equiv 2 \pmod{12} \\ \lfloor k/12 \rfloor + 1 & k \not\equiv 2 \pmod{12} \end{cases}$$

gilt. Dies folgt leicht mit Induktion. □

Wir können nun eine schwache Form des von Ramanujan vermuteten Koeffizientenwachstums der Diskriminante Δ beweisen, sogar allgemein für jede Spitzenform.

Proposition 3.13 *Ist $f \in S_k$ mit Fourierentwicklung $f = \sum_{d=1}^{\infty} a_d q^d$. Dann gibt es eine Konstante \mathcal{C} , sodass*

$$|a_d| \leq \mathcal{C} \cdot d^{k/2}.$$

Beweis : Wir verwenden wieder $\tilde{f}(\tau) = y^{k/2} |f(\tau)|$ wie im Beweis von Proposition 3.7, wobei $y = \text{Im } \tau$. Da f eine Spitzenform und da $|q| = e^{-2\pi y}$ ist, geht $\tilde{f}(\tau)$ (schnell) gegen Null für $\text{Im}(\tau) \rightarrow \infty$. So ist auch hier \tilde{f} auf dem Fundamentalbereich F beschränkt und damit

$$|f(\tau)| \leq c \cdot y^{-k/2}.$$

Aus der Integraldarstellung der Fourierkoeffizienten

$$a_d = e^{2\pi dy} \int_0^1 f(x + iy) e^{-2\pi idx} dx$$

folgt $|a_d| \leq c y^{-k/2} e^{2\pi dy}$ für alle $y > 0$. Setzt man $y = 1/d$, so erhält man das Resultat mit $\mathcal{C} = c e^{2\pi}$ (und eine andere Wahl von y verbessert bestenfalls die Konstante \mathcal{C} , nicht aber den Exponenten). □

So kurz dieser Beweis ist (und so wenige Hilfsmittel er benötigt): Die Verbesserung des Exponenten von 6 auf $11/2$ für $f = \Delta$ benötigt immens größeres Vorwissen und hat dafür ebenso weitreichende Konsequenzen.

Aufgabe 3.5 (4 Punkte)

i) Sei $g(z) = \frac{1}{z} + z$ für $z \in K_{0,\infty}$. Berechne g^+ und g^- .

ii) Sei $g(z) = \frac{z}{1+z^2}$ für $0 < |z-i| < 2$.

Wie sieht die Laurent-Entwicklung von g um i aus?

Welche Polordnung hat g bei i ?

Hinweis: Partialbruchzerlegung und geometrische Reihe.

Aufgabe 3.6 (4 Punkte)

Seien $M_k^{\mathbb{Z}} \subset M_k$ die ganzen Modulformen, deren Fourier-Koeffizienten alle ganzzahlig sind, d.h.

$$f(\tau) = \sum_{d \geq 0} a_d q^d \quad \text{mit} \quad a_d \in \mathbb{Z} \quad \forall d.$$

Wir nennen $f \in M_k^{\mathbb{Z}}$ *normiert*, falls $a_0 = 1$.

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die normierte Diskriminante $\Delta^* = (2\pi)^{-12} \Delta$ in $M_{12}^{\mathbb{Z}}$ liegt und normiert ist.

Zeige: Für jedes $k \geq 12$ und für jedes normierte $g \in M_k^{\mathbb{Z}}$ gilt

$$M_k^{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cdot g \oplus M_{k-12}^{\mathbb{Z}} \cdot \Delta^*, \quad \text{wobei} \quad M_0^{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad M_2^{\mathbb{Z}} = \{0\} \quad \text{sind.}$$

Zeige außerdem: $M_k^{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C} = M_k$.

Insbesondere gilt für alle k : $\text{rang}_{\mathbb{Z}} M_k^{\mathbb{Z}} = \dim_{\mathbb{C}} M_k$.

Hinweis: Proposition 2.26.

Aufgabe 3.7 (4 Punkte)

Wir lassen $\Gamma = \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ durch Möbiustransformationen auf $\mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ operieren.

- i) Bestimme $\Gamma \cdot \infty$, die Bahn von ∞ , so wie Γ_{∞} , den Stabilisator von ∞ .
- ii) Wir bezeichnen mit E_k die normierte Eisensteinreihe vom Gewicht k .

Zeige: Für $k \geq 4$ gerade gilt

$$E_k = \frac{1}{2\zeta(k)} G_k = 1 + i^k \frac{2k}{B_k} \sum_{d=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(d) q^d.$$

- iii) Zeige weiter: Für $k \geq 4$ gerade ist

$$E_k(\tau) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{\infty} \backslash \Gamma} 1|_k \gamma(\tau)$$

wobei die Summe über die Rechtsnebenklassen von Γ_{∞} in Γ läuft.

Aufgabe 3.8 (4 Punkte)

Wir kennen die Gruppen $\Gamma[n] = \text{Kern}(\Gamma \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})) \triangleleft \Gamma$.

- i) Gib ein Vertretersystem der Bahnen der Operation von $\Gamma[2]$ auf $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ an.
- ii) Sei $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f|_k \gamma = f$ für alle $\gamma \in \Gamma[n]$ für festes $n > 1$.

Gib eine Fourierentwicklung von f an.

Hinweis: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \Gamma[n]$ aber $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma[n]$.

- iii) Sei f wie eben. Wir nennen f eine *Modulform von Gewicht k zur Kongruenzgruppe $\Gamma[n]$* falls zusätzlich $f|_k \gamma$ für jedes $\gamma \in \Gamma$ auf $\{\text{Im } \tau > C\}$ für ein $C > 0$ beschränkt ist.

Zeige: $E_k^{\infty}[2] = \sum_{\gamma \in \Gamma[2]_{\infty} \backslash \Gamma[2]} 1|_k \gamma$ ist eine Modulform von Gewicht k für $\Gamma[2]$.

Aufgabe 3.9 (6 Punkte)

Seien $1 < N \in \mathbb{N}$ und $k \geq 4$ gerade. Zu einem Zeilenvektor $v \in \mathbb{Z}^2$, dessen Bild $\bar{v} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$ von Ordnung N ist, definieren wir (für $\tau \in \mathbb{H}$)

$$E_k^{\bar{v}}(\tau) = \varepsilon_N \sum (c\tau + d)^{-k},$$

wobei über teilerfremde $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ mit $(c, d) \equiv v \pmod{N}$ summiert wird und $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ und $\varepsilon_N = 1$ für $N > 2$ ist.

i) Zeige: $E_k^{\bar{v}} \in M_k(\Gamma[N])$.

Hinweis: Zeige zunächst, dass für alle $\gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ die Gleichheit

$$(E_k^{\bar{v}}|_k \gamma)(\tau) = E_k^{\overline{v\gamma}}(\tau)$$

gilt. Dabei bezeichnet $\bar{\cdot}$ die kanonische Projektion mod N .

ii) Sei nun $N = 2$. Zeige: Für $\bar{v} = \overline{(0, 1)}$ ist

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} E_k^{\bar{v}} = 1$$

und der Grenzwert ist 0 für alle anderen gültigen Wahlen von \bar{v} .

iii) Für $\gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $\gamma \cdot \infty = 0$ und f eine Modulform vom Gewicht k zu $\Gamma[2]$ sagen wir, dass f bei der Spitze 0 verschwindet, falls

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} (f|_k \gamma)(\tau) = 0.$$

Analog sei das Verschwinden bei anderen Spitzen definiert.

Sei nun $\bar{v} = \overline{(1, 0)}$ und $\gamma \cdot \infty = 0$.

Zeige: $\lim_{\tau \rightarrow \infty} (E_k^{\bar{v}}|_k \gamma)(\tau) = 1$ und für zulässige $\bar{w} \neq \bar{v}$ verschwindet $E_k^{\bar{w}}$ bei 0.

Was passiert im Fall $\tau \rightarrow 1$?

Folgere, dass $E_k^{\overline{(1,0)}}$, $E_k^{\overline{(0,1)}}$ und $E_k^{\overline{(1,1)}}$ linear unabhängig sind.

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} (f|_k \gamma)(\tau) = 0.$$

4 Quasimodulformen

Der Ring der Modulformen enthält mit den teilersummatorischen Funktionen viele wichtige Potenzreihen, die in Zählproblemen auftreten. Aber dieser Ring enthält (wegen Konvergenzproblemen) nicht die Eisensteinreihen vom Index 2 und er ist nicht unter Differentiation abgeschlossen. In diesem Abschnitt betrachten wir einen größeren Ring, der beide Problem behebt.

4.1 Eisensteinreihen in Gewicht 2

Die definierende Reihe der Eisensteinreihen konvergiert, wie wir gesehen haben, nur für $k > 2$. Außerdem haben wir gezeigt, dass $M_2 = \{0\}$ ist. Aber $k = 2$ liegt eben am Rand des Konvergenzbereichs und so gibt es in dieser Situation zwei interessante Funktionen, die fast so gut sind wie eine (holomorphe) Modulform vom Gewicht 2.

Zum einen ist die Fourierreihe (man beachte $-B_4/(2 \cdot 2) = -1/24$)

$$\mathbb{G}_2(\tau) = -\frac{1}{24} + \sum_{d=1}^{\infty} \tau_1(d)q^d = -\frac{1}{24} + q + 3q^2 + 4q^3 + 7q^4 + 6q^5 + \dots$$

aufgrund des linearen Wachstums der Fourierkoeffizienten auf ganz \mathbb{H} eine konvergente Potenzreihe und somit eine holomorphe Funktion. Wir verwenden auch die Normierung

$$E_2(\tau) = -24\mathbb{G}_2(\tau) = 1 - 24q - 72q^2 - \dots$$

Außerdem ist der Beweis von Proposition 2.22 noch gültig, wenn wir beachten, dass für jedes $0 \neq m \in \mathbb{Z}$ und jedes $\tau \in \mathbb{H}$ die Reihe $\sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{m\tau+n}\right)^2$ konvergiert. Also ist

$$-4\pi^2\mathbb{G}_2(\tau) = G_2 := \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \sum_{0 \neq m \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m\tau+n)^2} \right),$$

wobei wir beachten müssen, dass man die Summationsreihenfolge aufgrund der fehlenden absoluten Konvergenz nicht beliebig verändern darf. Diese Funktion kann nicht modular vom Gewicht zwei sein, sie ist es aber fast.

Proposition 4.1 Für $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ und $\tau \in \mathbb{H}$ gilt

$$G_2(M\tau) = (c\tau + d)^2 G_2(\tau) - \pi ic(c\tau + d). \quad (4.1)$$

Beweis : Wir führen eine leichte Modifikation von G_2 ein, und zwar für reelles $\varepsilon > 0$ sei

$$G_{2,\varepsilon}(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0,0\}} \frac{1}{(m\tau+n)^2 |m\tau+n|^{2\varepsilon}}.$$

Diese Reihe konvergiert aufgrund von Lemma 2.5 absolut und es gilt

$$G_{2,\varepsilon}(M\tau) = (c\tau + d)^2 |c\tau + d|^{2\varepsilon} G_{2,\varepsilon}(\tau).$$

Wir behaupten, dass $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_{2,\varepsilon}(\tau) = G_2(\tau) - \pi/(2y)$, wobei $\tau = x + iy$. Unter Verwendung der Behauptung verhält sich die nicht-holomorphe Funktion

$$G_2^*(\tau) = G_2(\tau) - \frac{\pi}{2y}$$

wie eine Modulform vom Gewicht zwei. Damit ist

$$\begin{aligned}
G_2(M\tau) &= G_2^*(M\tau) + \frac{\pi}{2 \operatorname{Im}(M\tau)} \\
&= (c\tau + d)^2 G_2(\tau) - (c\tau + d)^2 \frac{\pi}{2 \operatorname{Im}(\tau)} + \frac{\pi |c\tau + d|^2}{2 \operatorname{Im}(\tau)} \\
&= (c\tau + d)^2 G_2(\tau) - \frac{\pi(c\tau + d)}{2 \operatorname{Im}(\tau)} ((c\tau + d) - \overline{(c\tau + d)}) \\
&= (c\tau + d)^2 G_2(\tau) - \pi ic(c\tau + d).
\end{aligned}$$

Um nun die Behauptung zu beweisen, sei für $\varepsilon > -1/2$

$$I_\varepsilon(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(\tau + t)^2 |\tau + t|^{2\varepsilon}}.$$

Dann unterscheidet sich $G_{2,\varepsilon}$ von einer Reihe über I_ε -Werte um etwas wovon wir den Limes für $\varepsilon \rightarrow 0$ durch Einsetzen bestimmen können. Genauer gesagt ist

$$\begin{aligned}
G_{2,\varepsilon}(\tau) - \sum_{m=1}^{\infty} I_\varepsilon(m\tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2+2\varepsilon}} \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{(m\tau + n)^2 |m\tau + n|^{2\varepsilon}} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{(m\tau + t)^2 |m\tau + t|^{2\varepsilon}} \right]. \tag{4.2}
\end{aligned}$$

Wir betrachten zunächst die Differenz in der zweiten Summe auf der rechten Seite. Diese kann man auch als

$$\int_n^{n+1} f(t) - f(n) dt \quad \text{für} \quad f(t) = \frac{1}{(m\tau + t)^2 |m\tau + t|^{2\varepsilon}}$$

auffassen. Nach dem Mittelwertsatz ist der Integrand auf $[n, n+1]$ durch $\max_{s \in [n, n+1]} f'(s)$ beschränkt. Der Betrag diese Ableitung kann durch $|m\tau + n|^{-3-2\varepsilon}$ für nichtnegative n und durch $|m\tau + n + 1|^{-3-2\varepsilon}$ für negative n majorisiert werden. Nach dem Argument in Lemma 2.5 konvergiert also die zweite Summe für $\varepsilon > -\frac{1}{2}$ absolut und lokal gleichmässig. Man kann also das Integral und den Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ vertauschen. Dieser Limes ist dann also gleich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{(m\tau + n)^2} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{(m\tau + t)^2} \right].$$

Wir betrachten die Differenzen der zweiten Summe. Für festes m bilden beide Ausdrücke für sich eine absolut konvergente Reihe. Durch Integration sieht man, dass

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{dt}{(m\tau + t)^2} = 0.$$

Es verbleibt also im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ auf der rechten Seite von (4.2) gerade $G_2(\tau)$. Andererseits ist für $\tau = x + iy$

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(x + iy) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(x + t + iy)^2((x + t)^2 + y^2)^\varepsilon} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(t + iy)^2(t^2 + y^2)^\varepsilon} = \frac{J(\varepsilon)}{y^{1+2\varepsilon}}, \end{aligned}$$

wobei t zunächst durch $t + x$, dann durch t/y substituiert wurde und

$$J(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} (t + i)^{-2}(t^2 + 1)^{-\varepsilon} dt$$

ist. Also ist

$$\sum_{m=1}^{\infty} I_\varepsilon(m(x + iy)) = \frac{J(\varepsilon)\zeta(1 + 2\varepsilon)}{y^{1+2\varepsilon}}.$$

Durch elementare Integration erkennt man, dass $J(0) = 0$. Wir benutzen nun (ohne Beweis), dass die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s)$ an der Stelle $s = 1$ einen einfachen Pol hat, genauer gesagt, dass, für kleine ε , diese die Entwicklung $\zeta(1 + 2\varepsilon) = 1/(2\varepsilon) + O(1)$ hat. Dann können wir den obigen Limes nach l'Hôpital bestimmen. Dazu benötigen wir noch, dass

$$J'(0) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log(t^2 + 1)}{(t + i)^2} dt = \left(\frac{1 + \log(t^2 + 1)}{t + i} - \tan^{-1}(t) \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = -\pi.$$

Die behauptete Formel $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_{2,\varepsilon}(\tau) = G_2(\tau) - \pi/(2y)$ folgt jetzt durch Zusammensetzen der einzelnen Limes. □

4.2 Der Ring der Quasimodulformen

Sei $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Im Hinblick auf Anwendungen bei periodischen Funktionen definieren wir die Ableitung von f als

$$Df := f' := \frac{1}{2\pi i} \frac{df}{dz}.$$

Ist in der Tat $f(z + 1) = f(z)$ und schreiben wir $\bar{f}(q) = f(z)$ für $q = e^{2\pi iz}$, so ist $f' = q\partial\bar{f}/\partial q$. Allerdings ist der Ring von Modulformen unter dem Operator D nicht abgeschlossen, denn es gilt

$$f' \left(\frac{az + b}{cz + d} \right) = (cz + d)^{k+2} f'(z) + \frac{ck}{2\pi i} (cz + d)^{k+1} f(z). \quad (4.3)$$

Die Differenzen zum modularen Transformationsverhalten sind also bei der Eisensteinreihe G_2 und bei einer Ableitung von gleicher Bauart. Dies motiviert folgende Definition.

Definition 4.2 Eine holomorphe Funktion $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt Quasimodulform von Gewicht k und Tiefe p für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, falls es holomorphe Funktionen $f_i: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ gibt, sodass

$$(c\tau + d)^{-k} f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \sum_{i=0}^p f_i(\tau) \left(\frac{c}{c\tau + d}\right)^i, \quad (4.4)$$

für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, und falls f holomorph bei ∞ ist.

Das Transformationsverhalten für $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ im Stabilisator der Spitze ∞ , also für $c = 0$ besagt insbesondere, dass f periodisch unter $\tau \mapsto \tau + 1$ ist. Wir können als eine Quasimodulform als Laurent-Reihe in $q = e^{2\pi iz}$ schreiben und Holomorphie bei ∞ besagt, wie bei Modulformen, dass diese Reihe in der Tat eine Potenzreihe ist. Man beachte, dass die Anwendung der definierenden Gleichung (4.4) bei der Einheitsmatrix impliziert, dass $f_0 = f$ ist. Eine Quasimodulform der Tiefe Null ist offenbar gerade eine (holomorphe) Modulform. Allgemeiner zeigt man durch Anwendung von (4.4) auf das Produkt zweier Matrizen, dass f_i eine Quasimodulform von Gewicht $k - 2i$ und Tiefe $p - i$ ist (Übung).

Wir schreiben $\mathrm{QM}_k^{(\leq p)}$ für den Vektorraum der Quasimodulformen von Gewicht k und Tiefe $\leq p$ (und ggf. $\mathrm{QM}_k^{(p)}$ für die Teilmenge von Tiefe exakt p . Diese ist das Komplement eines Untervektorraums, kein Untervektorraum). Wir sagen allgemein kurz, dass f eine Quasimodulform von Gewicht k ist falls es ein p gibt, sodass $f \in \mathrm{QM}_k^{(\leq p)}$ liegt. Die Menge aller Quasimodulformen bildet einen graduierten Ring, mit den Bezeichnungen

$$\mathrm{QM} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathrm{QM}_k \quad \text{und} \quad \mathrm{QM}_k = \bigcup_{p \geq 0} \mathrm{QM}_k^{(\leq p)}.$$

Proposition 4.3 Der Ring der Quasimodulformen

- i) ist abgeschlossen unter dem Operator D , genauer ist $D(\mathrm{QM}_k^{(\leq p)}) \subseteq \mathrm{QM}_{k+2}^{(\leq p+1)}$ für alle $k, p \geq 0$.
- ii) lässt sich als Polynomring in E_2 mit Modulformen als Koeffizienten schreiben, d.h.

$$\mathrm{QM}_k^{(\leq p)} = \bigoplus_{r=0}^p M_{k-2r} E_2^r.$$

- iii) lässt sich additiv als Summe von Ableitungen von Modulformen und Ableitungen von E_2 beschreiben, genauer

$$\mathrm{QM}_k^{(\leq p)} = \begin{cases} \bigoplus_{r=0}^p D^r(M_{k-2r}), & \text{falls } p < k/2 \\ \bigoplus_{r=0}^p D^r(M_{k-2r}) \oplus \mathbb{C} \cdot D^{k/2-1} E_2, & \text{falls } p \geq k/2 \end{cases}$$

Aus dem zweiten Punkt folgt auch, dass Ring der Quasimodulformen (für die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$) isomorph (als graduierter Ring) zu $\mathbb{C}[E_2, E_4, E_6]$ ist, wobei E_k Gewicht k hat. Die

Formulierung des Satzes hat den Vorteil, dass sie quasi wörtlich analog für andere diskrete Untergruppen $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ gilt, deren Stabilisator von ∞ die von T erzeugte zyklische Gruppe ist.

Beweis : Die erste Aussage zeigt man durch Induktion nach der Tiefe p . Der Fall $p = 0$, also Modulformen folgt für alle k aus (4.3). Für den allgemeinen Fall leitet man die definierende Gleichung (4.4), verwendet die Induktionsvoraussetzung und die oben gemachte Bemerkung, dass f_i ebenfalls quasimodular von geringerer Tiefe ist.

Die Aussage ii) beweist man wiederum per Induktion. Der Fall $p = 0$ ist trivialerweise richtig. Ist f eine Quasimodulform von Tiefe $p > 0$, so subtrahiert man $f_p(\frac{G_2}{-2\pi i})^p \in M_{k-2p} \cdot E_2^p$ und erhält wegen (4.1) eine Quasimodulform geringerer Tiefe.

Punkt iii) verbleibt als Übung. □

Manchmal ist es bequem, Ramanujan's Notation $P = E_2$, $Q = E_4$ und $R = E_6$ für die erzeugenden Eisensteinreihen des Rings der Quasimodulformen zu verwenden. Da $D(P) = -24x - 144x^2 - \dots$ eine Quasimodulform von Gewicht 4, also ein Linearkombination von P^2 und Q sein muss, erhält man durch Koeffizientenvergleich sofort die erste und analog die anderen der Beziehungen

$$D(P) = \frac{1}{12}(P^2 - Q), \quad D(Q) = \frac{1}{3}(PQ - R), \quad D(R) = \frac{1}{2}(PR - Q^2). \quad (4.5)$$

Aus der Eigenschaft $M_k = \mathbb{C} \cdot E_k \oplus S_k$ (vgl. den Beweis zu Satz 3.11) und aus Proposition 4.3 kann man eine weitere Schreibweise des Vektorraums der Quasimodulformen herleiten.

Proposition 4.4 *Der Vektorraum der Quasimodulformen ist die direkte Summe der Untervektorräume **DE** bestehend aus allen Ableitungen aller Eisensteinreihen E_k ($k \geq 2$ gerade) und **DS** bestehend aus allen Ableitungen von Spitzenformen.*

Aufgabe 4.1 (4 Punkte)

Sei f eine Modulform von Gewicht k . Dann definieren wir die Ableitung von f als

$$f' := \frac{1}{2\pi i} \frac{df}{dz}.$$

i) Zeige, dass f' nicht modular ist: Für $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt

$$f' \left(\frac{az + b}{cz + d} \right) = (cz + d)^{k+2} f'(z) + \frac{ck}{2\pi i} (cz + d)^{k+1} f(z).$$

ii) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Eisensteinreihe E_2 auch keine Modulform ist aber ein ähnliches Transformationsverhalten aufweist. Zeige, dass die *Serre-Ableitung*

$$\vartheta_k f := f' - \frac{k}{12} E_2 f$$

eine Modulform vom Gewicht $k + 2$ ist.

iii) Wir nennen $\widetilde{M}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) := \mathbb{C}[E_2, E_4, E_6]$ den Ring der *Quasimodulformen*.

Zeige, dass $\widetilde{M}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ unter dem Ableitungsoperator abgeschlossen ist.

Aufgabe 4.2 (4 Punkte)

i) Sei $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Quasimodulform von Gewicht k und Tiefe p für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Beweisen Sie, dass die zugehörigen $f_i: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ Quasimodulformen von Gewicht $k - 2i$ und Tiefe $p - i$ sind.

ii) Seien

$$\delta: \mathrm{QM} \rightarrow \mathrm{QM}, \quad f \mapsto f_1,$$

und $E = \oplus E_k$, wobei

$$E_k: \mathrm{QM}_k \rightarrow \mathrm{QM}_k, \quad f \mapsto kf.$$

Zeigen Sie, dass $f_i = \delta^i f / i!$ und dass folgende Identitäten erfüllt sind:

$$[E, D] = 2D, \quad [E, \delta] = -2\delta, \quad [D, \delta] = E.$$

Dabei bezeichnet $[\cdot, \cdot]$ den Kommutator.

Aufgabe 4.3 (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass:

$$\mathrm{QM}_k^{(\leq p)} = \begin{cases} \oplus_{r=0}^p D^r(M_{k-2r}), & \text{falls } p < k/2 \\ \oplus_{r=0}^p D^r(M_{k-2r}) \oplus \mathbb{C} \cdot D^{k/2-1} E_2, & \text{falls } p \geq k/2 \end{cases}$$

für alle geraden k .

4.3 Das Wachstumspolynom

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, die grobe Abschätzung des Wachstumsverhalten von Eisensteinreihen aus Abschnitt 2.6 zu verfeinern und auf Quasimodulformen auszudehnen. Dabei wollen wir auch das Wachstumsverhalten von Produkten und Linearkombinationen bestimmen. Das Wachstumsverhalten wird daher als Polynom codiert. Dieses Kapitel basiert auf [CMZ16], wo man weitere Eigenschaften des Wachstumspolynoms findet. Das Wachstumspolynom wird durch die einfache Definition

$$\mathrm{Ev}: \mathrm{QM} \rightarrow \mathbb{C}[X], \quad E_2 \mapsto X + 12, \quad E_4 \mapsto X^2, \quad E_6 \mapsto X^3 \quad (4.6)$$

gegeben. Der Summand 12 wirkt weniger unnatürlich, wenn wir die Gleichung (4.1) durch 24 teilen, um sie in die Normierung von E_2 zu bringen.

Proposition 4.5 *Die alternativen Definitionen des Wachstumspolynoms*

$$\mathrm{Ev}[f] = 0 \text{ for } f \in \mathbf{DS}, \quad \mathrm{Ev}[D^r(E_{2\ell})](X) = \begin{cases} \delta_{r,0} & \text{if } \ell = 0, \\ (r+1)! X + 12 r! & \text{if } \ell = 1, \\ \frac{(r+2\ell-1)!}{(2\ell-1)!} X^\ell & \text{if } \ell \geq 2. \end{cases}$$

auf \mathbf{DS} und \mathbf{DE} , bzw. axiomatisch durch

-
- (i) $\text{Ev}[f](X) = a_0(f)X^k$ für $f \in M_{2k}$;
 - (ii) $\text{Ev}[E_2](X) = X + 12$;
 - (iii) $\text{Ev}[D(f)] = (X \frac{d}{dX} + k)\text{Ev}[f]$ für $f \in \text{QM}_{2k}$.

sind äquivalent zur Definition in (4.6)

Beweis : Zunächst überzeugt man sich leicht, dass die beiden Definition in der Proposition äquivalent sind. Wir zeigen nun, dass der in (4.6) eingeführte Ringhomomorphismus, den wir zur Unterscheidung temporär mit $\Phi : \text{QM}_* \rightarrow \mathbb{C}[X]$ bezeichnen, auch die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) hat. Für die dritte Eigenschaft haben wir zu zeigen, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{QM}_* & \xrightarrow{\text{Ev}} & \mathbb{C}[X] \\ D-H \downarrow & & \downarrow X \frac{d}{dX} \\ \text{QM}_* & \xrightarrow{\text{Ev}} & \mathbb{C}[X] \end{array}$$

kommutiert, wobei $H : \text{QM}_* \rightarrow \text{QM}_*$ der 'halbe Euler'-Operator ist, der $f \in \text{QM}_{2k}$ auf kf abbildet. Da die vertikalen Abbildungen im Diagramm beides Derivationen und die horizontalen Abbildungen beides Ringhomomorphismen sind, genügt es die Kommutativität auf Ringerzeugern nachzurechnen. Dort folgt sie aus den Formeln (4.5), denn

$$\begin{aligned} P & \xrightarrow{D-H} \frac{P^2 - Q}{12} - P \xrightarrow{\Phi} \frac{(X+12)^2 - X^2}{12} - (X+12) = X = X \frac{d}{dX} \Phi(P), \\ Q & \xrightarrow{D-H} \frac{PQ - R}{3} - 2Q \xrightarrow{\Phi} \frac{(X+12)X^2 - X^3}{3} - 2X^2 = 2X^2 = X \frac{d}{dX} \Phi(Q), \\ R & \xrightarrow{D-H} \frac{PR - Q^2}{2} - 3R \xrightarrow{\Phi} \frac{(X+12)X^3 - X^4}{2} - 3X^3 = 3X^3 = X \frac{d}{dX} \Phi(R), \end{aligned}$$

□

Satz 4.6 Sei $f = \sum_{n \geq 0} a_n q^n$ eine Quasimodulform vom Gewicht $2k$ mit $\text{Ev}[f] = AX^h + \dots$, wobei der führende Koeffizient $A \neq 0$ ist. Dann hat die Summe der ersten N Fourierkoeffizienten von f das asymptotische Wachstumsverhalten

$$\sum_{n=1}^N a_n(f) = (-4\pi^2)^h A \frac{N^{h+k}}{(h+k)!} + O(N^{h+k-1} \log(N)). \quad (4.7)$$

Beweis : Für $k = 0$ ist nichts zu zeigen, da $a_n(f) = 0$ für alle $n \geq 1$. Falls $k \geq 1$, können wir f als Linearkombination von Ableitungen $D^{k-\ell} G_{2\ell}$ und $D^{k-\ell} f_\ell$ mit $1 \leq \ell \leq k$, wobei $G_{2\ell}$ die Eisensteinreihe und f_ℓ eine Spitzenform vom Gewicht 2ℓ ist. Da wir annehmen, dass $\text{Ev}[f]$ nicht identisch verschwindet, gibt es mindestens einen Eisensteinreihen-Beitrag. Da der X -Grad von $\text{Ev}(D^{k-\ell} G_{2\ell})$ gleich ℓ ist, folgt $1 \leq h \leq k$. Wir verwenden zunächst, dass die

Ableitungen $D^{k-\ell} f_\ell$ der Spitzenformen aufgrund von Proposition 4.7 unten und $h \geq 1$ vom Fehlerterm in (4.7) absorbiert werden. Es genügt daher den Falls $f = D^r G_{2\ell}$ für $\ell \geq 1, r \geq 0$ mit $k = \ell + r$ zu betrachten. Nach Definition gilt

$$\begin{aligned} \text{Ev}[D^r G_{2\ell}] &= -\frac{B_{2\ell}}{4\ell} \frac{(r+2\ell-1)!}{(2\ell-1)!} X^\ell - \frac{r!}{2} \delta_{\ell,1} \\ &= (r+2\ell-1)! \frac{\zeta(2\ell)}{(2\pi i)^{2\ell}} X^\ell - \frac{r!}{2} \delta_{\ell,1}. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_n(D^r G_{2\ell}) &= \sum_{n=1}^N n^r \sigma_{2\ell-1}(n) = \sum_{\substack{a, b \geq 1 \\ ab \leq N}} a^{r+2\ell-1} b^r \\ &= \sum_{b=1}^N b^r \left(\frac{(N/b)^{r+2\ell}}{r+2\ell} + O((N/b)^{r+2\ell-1}) \right) \\ &= \zeta(2\ell) \frac{N^{r+2\ell}}{r+2\ell} + O(N^{r+2\ell-1} \log N), \end{aligned}$$

wobei wir beim Übergang von der ersten zur zweiten Zeile eine Riemann-Summe durch das Integral ersetzt und den Fehlerterm nach dem Mittelwertsatz durch die Ableitung abgeschätzt haben. Ein analoges Argument für das Restglied der Zetafunktion (Übung) liefert den Übergang zur dritten Zeile. (Den Faktor $\log N$ benötigt man nur für $\ell = 1$.) \square

Die folgende Proposition ist eine starke Verschärfung der Aussage von Proposition 3.13.

Proposition 4.7 *Sei f eine Spitzenform vom Gewicht 2ℓ . Dann ist*

$$\sum_{n \leq N} a_n(f) = O(N^{\ell - \frac{1}{6}})$$

und daher

$$\sum_{n \leq N} a_n(D^{k-\ell} f) = \sum_{n \leq N} n^{k-\ell} a_n(f) = O(N^{k - \frac{1}{6}}).$$

(Eine Abschätzung $O(N^\ell \log N)$ würde für obige Anwendung auch genügen.)

Beweis : Ein Beweis der ersten Aussage findet sich in [HI89]. Er benutzt die Ramanujan-Vermutung (Deligne's Satz), dass $|a_n| \leq n^{(\ell-1)/2}$ in voller Stärke. Es genügt offenbar, die Aussage auf einer Basis zu testen. Für eine Basis aus Hecke-Eigenformen¹ gilt zudem die schwache Multiplikativität $a_{mn}(f) = a_m(f)a_n(f)$ für $\text{ggT}(m, n) = 1$. Die Abschätzungen in loc. cit. basieren im Wesentlichen auf diesen zwei Beobachtungen.

¹Dieser Abschnitt über Hecke-Operatoren fehlt noch!

Die zweite Behauptung folgt aus der ersten durch partielle Summation, d.h. die Anwendung der Identität (sei $A_n = \sum_{j=1}^n a_j$)

$$\sum_{n=1}^N a_n b_n = A_N b_N - \sum_{n=1}^{N-1} A_n (b_{n+1} - b_n)$$

auf $a_n = a_n(f)$ und $b_n = n^{k-\ell}$. □

Aufgabe 4.4 (4 Punkte)

i) Beweisen Sie, dass:

$$\sum_{n \leq N} \frac{1}{n} = \log(N) + C + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

ii) Beweisen Sie, dass:

$$\sum_{n \leq N} \frac{1}{n^s} = \frac{N^{1-s}}{1-s} + \zeta(s) + O(N^{-s})$$

für alle $s > 0, s \neq 1$.

Hinweis: Verwenden Sie die Euler'sche Summationsformel:

$$\sum_{y < n \leq x} f(n) = \int_y^x f(t) dt + \int_y^x (t - [t]) f'(t) dt + f(x)([x] - x) - f(y)([y] - y)$$

wobei f' stetig in $[y, x]$ ist und $[t]$ die grösste ganze Zahl $\leq t$ ist.

Aufgabe 4.5 (4 Punkte)

Sei A eine Algebra über einem Körper K . Eine Derivation D ist eine K -lineare Abbildung $D : A \rightarrow A$, so dass

$$D(ab) = D(a)b + aD(b).$$

- i) Sei A eine endlich erzeugte K -Algebra mit Erzeugern x_1, \dots, x_n . Beweisen Sie, dass D durch die Werte $D(x_1), \dots, D(x_n)$ eindeutig bestimmt ist.
- ii) Zeigen Sie, dass die Menge aller Derivationen $\text{Der}_K(A)$ ein A -Modul ist.
- iii) Zeigen Sie, dass die Abbildungen $D : \text{QM}_* \rightarrow \text{QM}_*$ und $H : \text{QM}_* \rightarrow \text{QM}_*$ aus der Vorlesung Derivationen sind.

5 Theta-Funktionen

In diesem Abschnitt führen wir Theta-Funktionen ein, neben Eisensteinreihen die zweite vielseitige Quelle von Modulformen. Als Anwendung der Theorie präsentieren wir Lösungen der Probleme, ganze Zahlen als Summe von zwei und von vier Quadraten darzustellen. Beide Probleme können auch ohne Modulformen elementar gelöst werden, siehe zum Beispiel [Gosswald]. Beim Zugang über Modulformen lernen wir nebenbei zumindest knapp

eine verallgemeinerte Definition, Modulformen für Untergruppen und mit Dirichletcharakteren, kennen.

Wir starten mit der *Jacobi-Thetafunktion*

$$\theta(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots,$$

wobei wie üblich $q = e^{2\pi i \tau}$ ist. Diese ist noch keine Modulform, zumindest keine im bisher definierten Sinne für $SL_2(\mathbb{Z})$, hat aber ein ähnliches Transformationsverhalten.

Proposition 5.1 Die *Jacobi-Thetafunktion* erfüllt für $\tau \in \mathbb{H}$

$$\theta(\tau + 1) = \theta(\tau) \quad \text{und} \quad \theta\left(\frac{-1}{4\tau}\right) = \sqrt{\frac{2\tau}{i}} \theta(\tau), \quad (5.1)$$

wobei diejenige Quadratwurzel zu wählen ist, die für positive reelle Argumente positiv ist.

Beweis : Die erste Gleichung ist offensichtlich nach Definition. Als Vorüberlegung zur zweiten Gleichung betrachten wir eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, die glatt ist und für betragsgroße Zahlen so schnell fällt, dass $g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n+x)$ eine konvergente Reihe ist. Da die Funktion g periodisch ist, besitzt sie eine Fourierentwicklung

$$g(x) = \sum_{d \in \mathbb{Z}} c_d e^{2\pi i d x}, \quad \text{wobei} \quad c_d = \int_0^1 g(x) e^{-2\pi i d x} dx.$$

Also ist mit $\tilde{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x y} f(x) dx$ gerade $\tilde{f}(-d) = c_d$. Damit erhalten wir die gewünschte *Poisson-Transformationsformel*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = g(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{f}(-n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{f}(n).$$

Angewandt auf $f(x) = e^{-\pi t x^2}$ ist

$$\begin{aligned} \tilde{f}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x y - \pi t x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(\sqrt{t}x - iy/\sqrt{t})^2 - \pi y^2/t} dx \\ &= \frac{e^{-\pi y^2/t}}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi u^2} du = \frac{e^{-\pi y^2/t}}{\sqrt{t}}. \end{aligned}$$

und damit

$$\sum_{d=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi d^2 t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{d=-\infty}^{\infty} e^{-\pi d^2/t}.$$

Das ist genau die zweite Gleichung für $t = i/(2\tau)$. Da beide Seiten holomorphe Funktionen sind und auf einer Menge mit Häufungspunkt übereinstimmen, müssen sie nach dem Identitätssatz auch global übereinstimmen. \square

Wir wollen diese Aussage in Termen von Modulformen interpretieren. Die zugrunde liegende Gruppe ist aber offenbar nicht $SL_2(\mathbb{Z})$. Stattdessen betrachten wir die Kongruenzuntergruppe $\Gamma_0(N) \subseteq SL_2(\mathbb{Z})$, die aus allen Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $c \equiv 0 \pmod{N}$ besteht. Zusätzlich benötigen wir das Element $W_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$. Dieses liegt zwar nicht in $SL_2(\mathbb{Z})$, aber W_N normalisiert $\Gamma_0(N)$, d.h. $W_N \Gamma_0(N) W_N^{-1} = \Gamma_0(N)$, und $W_N^2 = -I$. Also enthält die Gruppe $\Gamma_0^+(N) = \langle \Gamma_0(N), W_N \rangle$ die Untergruppe $\Gamma_0(N)$ mit Index zwei. Im allgemeinen ist $\Gamma_0(N)$ nicht von $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\tilde{T} = W_N T W_N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ N & -1 \end{pmatrix}$ erzeugt, aber für $N = 4$ ist dies für das Bild in $PSL_2(\mathbb{R})$ bzw. nach Hinzunahme von $W_N^2 = -I$ noch richtig.

Proposition 5.2 Die Gruppe $\Gamma_0(4)$ ist von T, \tilde{T} und $-I$ erzeugt.

Beweis : Ist $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4)$ so ist a (und d) ungerade. Also ist $|a| \not\equiv 2|b|$. Das Ersetzen von γ durch $\gamma \cdot T^{\pm 1}$ bewahrt a und ersetzt b durch $a \pm b$. Ist also $|a| < 2|b|$ so ist $|a + b| < |b|$ oder $|a - b| < |b|$ und man kann durch Multiplikation von γ mit der geeigneten T -Potenz $a^2 + b^2$ verkleinern. Ist $|a| > 2|b|$, so ist $|a - 4b| < |a|$ oder $|a + 4b| < |a|$. Also verkleinert $\gamma \cdot \tilde{T}^{\pm 1}$ nun $a^2 + b^2$, solange bis $b = 0$ ist. Sind wir dort angekommen, so ist $\gamma \in \langle \pm \tilde{T} \rangle$. \square

Wir behandeln ab sofort θ^2 um die Frage nach der Wahl des Zweiges für die Wurzel im Transformationsverhalten 5.1 nicht diskutieren zu müssen. Aber selbst θ^2 ist nicht ganz eine Modulform für $\Gamma_0(4)$. Das Transformationsverhalten für $\hat{T} = W_4 T W_4^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ ist

$$\theta^2(\hat{T}\tau) = (4\tau + 1)\theta^2(\tau),$$

also wie das einer Modulform vom Gewicht eins. Aber ein Vorzeichen ist falsch, wie man aus

$$\theta^2(-I\tau) = \theta^2(W^2\tau) = \frac{2W\tau}{i} \theta^2(W\tau) = \frac{2}{i} \cdot \frac{-1}{4\tau} \cdot \frac{2\tau}{i} \theta^2(\tau) = \theta^2(\tau) \neq (-1)\theta^2(\tau)$$

ersieht. Die notwendige Korrektur liefert die folgende Definition.

Definition 5.3 Ein Dirichlet-Charakter ist ein Homomorphismus $\chi_N : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \rightarrow \mathbb{C}^*$, den man auf ganz \mathbb{Z} fortsetzt, indem man $\chi_N(n) = 0$ für $\text{ggT}(n, N) \neq 1$ und ansonsten $\chi_N(n) := \chi(n \pmod{N})$ definiert.

In diesem Kapitel benötigen hauptsächlich den eindeutig bestimmten nichttrivialen Charakter χ_{-4} modulo $N = 4$, d.h. $\chi_{-4}(3) = -1$.

Definition 5.4 Eine Modulform vom Gewicht k zum Dirichlet-Charakter χ auf der Gruppe $\Gamma \leq SL_2(\mathbb{Z})$ ist eine holomorphe Abbildung $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$, die der Transformation

$$f(M\tau) = \chi(a)(c\tau + d)^k f(z) \quad \text{für alle } M \in \Gamma$$

genügt und die holomorph bei allen Spitzen ist, d.h. $f|_k \gamma$ ist holomorph bei unendlich für jedes $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$.

Die Menge der Modulformen auf Γ mit Dirichlet-Charakter χ zu festem Gewicht k bildet offenbar einen Vektorraum $M_k(\Gamma, \chi)$.

Wenn wir uns von der Untergruppe $\Gamma_0(N)$ von $SL_2(\mathbb{Z})$ auf die Untergruppe $\Gamma_1(N)$ bestehend aus $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $c \equiv 0 \pmod{N}$ sowie $a \equiv 1 \pmod{N}$ (und folglich $d \equiv 1 \pmod{N}$) einschränken, so wird jede Modulform vom Gewicht k und Dirichlet-Charakter χ_N auf $\Gamma_0(N)$ zu einer (gewöhnlichen) Modulform vom Gewicht k auf $\Gamma_1(N)$. Die Motivation für die Einführung des Konzepts Dirichlet-Charakter ist, dass alle Modulformen auf $\Gamma_1(N)$ auch Modulformen auf $\Gamma_0(N)$ für einen geeigneten Dirichlet-Charakter sind. Der Beweis ist Konsequenz der Tatsache, dass $\Gamma_1(N)/\Gamma_0(N) \cong (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ ist (siehe Übung).

Nun enthält die Gruppe $\Gamma_1(N)$ die sogenannte *Hauptkongruenzuntergruppe*

$$\Gamma(N) = \ker(SL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))$$

und ist also von endlichem Index in $SL_2(\mathbb{Z})$, da $SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ endlich ist. Für alle Untergruppen von endlichem Index von $SL_2(\mathbb{Z})$ kann man (analog zu Satz 3.11) die Dimension des Vektorraums $M_k(\Gamma)$ bestimmen, und diese Dimension ist endlich. Speziell kann man Modulformen für $\Gamma_0(N)$ mit Dirichlet-Charakter als Modulformen für $\Gamma_1(N)$ auffassen und letztere nach Charakter sortieren.

Das Ergebnis dieser Diskussion ist, dass man ausgehend von der Verallgemeinerung der Dimensionaussage in Satz 3.11 leicht beweisen kann, dass $\dim M_1(\Gamma_0(4), \chi_{-4}) = 1$ ist und dass also θ^2 diesen Vektorraum erzeugt.

Wir geben nun eine Anwendung des Konzepts Modulform mit Dirichlet-Charakter auf ein zahlentheoretisches Problem.

Satz 5.5 Sei $r_2(n) = \#\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a^2 + b^2 = n\}$ die Anzahl der Darstellungen von n als Summe von zwei Quadraten. Dann gilt

$$r_2(n) = 4 \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ ungerade}}} (-1)^{(d-1)/2}.$$

Auch für $\Gamma_0(4)$ und mit Charakteren kann man Eisensteinreihen definieren, allerdings konvergiert die Reihe

$$G_k(\tau; \chi) = \sum_{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \chi(c)(c\tau + d)^{-k}$$

wiederum nur für $k > 2$. Man kann aber auch den Exponenten k als komplexen Parameter auffassen. Mit komplexen Potenzen funktioniert das, wenn man

$$G_k(\tau, s; \chi) = \sum_{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \chi(c)(c\tau + d)^{-k} |c\tau + d|^{-2s}$$

setzt. Der bisherige Konvergenzbeweis zeigt, dass diese Reihe für $k + \operatorname{Re}(2s) \geq 2 + \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ absolut gleichmäßig konvergiert, also dort eine holomorphe Funktion darstellt. Diese kann man nun auf die ganze komplexe Ebene (im Parameter s) analytisch fortsetzen. In der Fourier-Entwicklung kann man dann $s = 0$ setzen und erhält, dass die Fourier-Reihe proportional zu

$$G_{k,\chi}(z) = c_k(\chi) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|n} \chi(d) d^{k-1} \right) q^n \quad (5.2)$$

ist. Dabei ist $c_k(\chi) = -B_{k,\chi}/(2k)$ und $B_{k,\chi}$ die verallgemeinerte Bernoulli-Zahl definiert durch

$$\sum_{a=1}^N \frac{\chi(a) \cdot t e^{at}}{e^{Nt} - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_{k,\chi} \frac{t^k}{k!}.$$

Zusammengefasst liegt das so definierte $\mathbb{G}_{k,\chi}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle Dirichlet-Charaktere χ modulo N in $M_k(\Gamma_0(N), \chi)$. Details hierzu findet man in [Miyake, Chapter 7]. Die verallgemeinerten Bernoullizahlen wurden in [Leopoldt] eingeführt.

Beweis von Satz 5.5: Aufgrund von

$$\theta^2(\tau) = \left(\sum_{a \in \mathbb{Z}} q^{a^2} \right) \left(\sum_{b \in \mathbb{Z}} q^{b^2} \right)$$

sind die Zahlen $r_2(n)$ gerade die Fourierkoeffizienten von $\theta^2(\tau)$. Da $\dim M_1(\Gamma_0(4), \chi_{-4}) = 1$, sind θ^2 und $G_{1,\chi_{-4}}$ proportional. Aufgrund von $c_1(\chi_{-4}) = 1/4$ ist $\theta^2(\tau) = 4G_{1,\chi_{-4}}(\tau)$ und die Behauptung ist nun eine Umformulierung dieser Aussage. \square

Als nächstes wollen wir zeigen, dass sich jede positive ganze Zahl als Summe von vier Quadraten schreiben lässt. Dies ist eine Konsequenz des folgenden Satzes.

Satz 5.6 Die Anzahl $r_4(n) = \#\{(a, b, c, d) : a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = n\}$ der Darstellungen von n als Summe von 4 Quadraten ist

$$r_4(n) = 8 \sum_{d|n, 4 \nmid d} d.$$

Die gesuchten Zahlen $r_4(n)$ sind offenbar die Koeffizienten der Fourierentwicklung von $\theta^4(\tau)$, welches eine Modulform vom Gewicht zwei auf $\Gamma_0(4)$ (nun ohne Dirichletcharakter) nach Proposition 5.2 ist. Wir wollen diesen Raum nun näher untersuchen. Dabei verwenden wir ohne Beweis, dass für eine Untergruppe $\Gamma \subseteq \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ vom Index m die Abschätzung

$$\dim M_k(\Gamma) \leq \frac{km}{12} + 1$$

gilt. (Zum Beweis hiervon verwendet man den Satz von Riemann-Roch.) Da der Index $[\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(4)] = 6$ (Übung) ist, folgt also $\dim M_2(\Gamma_0(4)) \leq 2$.

Beweis von Satz 5.6: Die Funktionen $G_2^*(\tau)$ (aus dem Beweis von Satz 4.1), $H_2^*(\tau) = G_2^*(2\tau)$ und $J_2^*(\tau) = G_2^*(4\tau)$ sind zwar nicht holomorph, transformieren sich aber unter $\Gamma_0(4)$ wie eine Modulform vom Gewicht 2. Wir beweisen diese Behauptung im Detail. Die Invarianz unter $\tau \mapsto \tau + 1$, das richtige Transformationsverhalten unter $-I$ ist sowieso klar. Es ist

$$\begin{aligned} H_2^*\left(\frac{\tau}{4\tau+1}\right) &= G_2^*\left(\frac{2\tau}{4\tau+1}\right) = G_2^*\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}(2\tau)\right) \\ &= (4\tau+1)^2 G_2^*(2\tau) = (4\tau+1)^2 H_2^*(\tau) \end{aligned}$$

und analog rechnet man das Transformationsverhalten für den diesen dritten Erzeuger von $\Gamma_0(4)$ im Falle von $J_2^*(\tau)$ nach. Nun ist $G_2^*(\tau) + \frac{\pi}{2y}$ holomorph, also sind

$$\begin{aligned} G_2^*(\tau) - 2H_2^*(\tau) &= G_2(\tau) - 2G_2(2\tau) \quad \text{und} \\ H_2^*(\tau) - 2J_2^*(\tau) &= G_2(2\tau) - 2G_2(4\tau) \end{aligned}$$

sowohl holomorph also auch modular, also in $M_2(\Gamma_0(4))$.

Aus der Fourierentwicklung

$$\frac{-1}{4\pi^2} (G_2(\tau) - 2G_2(2\tau)) = \mathbb{G}_2(\tau) - 2\mathbb{G}_2(2\tau) = \frac{1}{24} + q + q^2 + 4q^3 + \dots$$

und

$$\frac{-1}{4\pi^2} (G_2(\tau) - 2G_2(4\tau)) = \mathbb{G}_2(\tau) - 2\mathbb{G}_2(4\tau) = \frac{1}{24} + q^2 + q^4 + 4q^6 + \dots$$

erkennt man, dass die beiden Reihen linear unabhängig sind und also $M_2(\Gamma_0(4))$ aufspannen. Aus $\theta^4(\tau) = 1 + 8q + \dots$ folgt

$$\begin{aligned} \theta^4(\tau) &= 8(\mathbb{G}_2(\tau) - 2\mathbb{G}_2(2\tau)) + 16(\mathbb{G}_2(2\tau) - 2\mathbb{G}_2(4\tau)) \\ &= 8(\mathbb{G}_2(\tau) - 4\mathbb{G}_2(4\tau)). \end{aligned}$$

Der Vergleich der q -Koeffizienten liefert die Aussage. □

Die bisher eingeführte Theta-Funktion hat als Exponenten $Q(n) = n^2$, die Werte einer quadratischen Form in einer Variablen. Im Rest dieses Abschnitts wollen wir dies auf ganzzahlige quadratische Formen

$$Q: \mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathbb{Z}$$

in m Variablen verallgemeinern. Wir nehmen dabei stets an, dass Q positiv definit ist. Zu einer solchen quadratischen Form assoziieren wir die Thetafunktion

$$\theta_Q(\tau) = \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}^m} q^{Q(x_1, \dots, x_m)}.$$

Die Koeffizienten dieser Fourierreihe sind offenbar $R_Q(n)$, die Anzahl der Möglichkeiten die Zahl n als Wert von Q darzustellen. Wir wollen skizzieren, warum diese Thetareihen stets

Modulformen sind und welche geometrischen Folgerungen wir hieraus ziehen können. Wir folgen dabei [Zag08].

Jede quadratische Form kann man als

$$Q(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m a_{ij}x_i x_j$$

mit einer symmetrischen Matrix $A = (a_{ij})$ schreiben.

Die Ganzzahligkeit von Q impliziert, dass die Diagonaleinträge a_{ii} gerade sind und die übrigen Einträge ganzzahlig. Eine solche Matrix nennt man eine *gerade ganzzahlige Matrix*. Da Q positiv definit ist, muss A invertierbar sein. Die kleinste positive ganze Zahl N mit der Eigenschaft, dass NA^{-1} wieder einer gerade ganzzahlige Matrix ist, wird das *Level* von Q (oder von A) genannt. Wir definieren einen Dirichlet-Charakter χ_A modulo N , welcher durch seine Werte auf Primzahlen $p \nmid N$ bestimmt ist und dort den Wert $\chi_A(p) = \left(\frac{(-1)^m \det A}{p}\right)$ (Legendre-Symbol) hat. Damit können wir das genaue Transformationsverhalten von θ_Q bestimmen.

Satz 5.7 *Ist Q eine positiv definite ganzzahlige quadratische Form in $m = 2k$ Variablen zum Level N , so ist θ_Q eine Modulform auf $\Gamma_0(N)$ vom Gewicht k zum Dirichletcharakter χ_A .*

Für eine ungerade Zahl von Variablen gilt ein entsprechender Satz, bei dem man den Begriff der Modulform von halb-ganzzem Gewicht benötigt. Der Beweis ist in beiden Fällen eine Anpassung der Idee von Proposition 5.2, d.h. auch er basiert auf der Poisson-Summenformel.

Jedes Gitter $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^m$ definiert (nach Wahl einer Gitterbasis $B = \{b_1, \dots, b_m\}$) eine quadratische Form

$$Q(x_1, \dots, x_m) = \left\| \sum x_i b_i \right\|^2.$$

Die Determinante der Matrix A , die wir oben Q zugeordnet haben, ist offenbar gleich dem Covolumen des Gitters und somit unabhängig von der Wahl der Basis.

Obige Eigenschaften von Thetafunktionen sind anwendbar auf Gitter, wenn Q ganzzahlig ist. Auch diese Eigenschaft hängt nicht von der Wahl der Gitterbasis ab. Gitter (oder quadratische Formen) mit Covolumen 1 werden auch *unimodular* genannt. Solche Gitter werden zum Beispiel in der Codierungstheorie (gute fehlerkorrigierende Codes) verwendet.

Proposition 5.8 *Sei $Q: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ positiv definit und unimodular. Dann wird m von 8 geteilt und es gilt (für $n \rightarrow \infty$ und $m = 2k$)*

$$R_Q(n) = -\frac{2k}{B_k} \sigma_{k-1}(n) + \mathcal{O}(n^{k/2}).$$

Beweis : Wir betrachten zunächst den Fall, dass $m = 2k$ ein Vielfaches von 4 ist, also k gerade ist. In diesem Fall ist θ_Q eine Modulform vom Gewicht k für $SL_2(\mathbb{Z})$ aufgrund der Unimodularität (und da ein Dirichletcharakter modulo Eins trivial ist). Da die Fourierentwicklung der Thetareihe mit 1 beginnt, ist nach den Ergebnissen aus Abschnitt 3.3 und den Übungen

$$\theta_Q = -\frac{2k}{B_k} \mathbb{G}_k + f_k,$$

wobei f_k eine Spitzenform vom Gewicht k ist. Daraus folgt, dass $k \equiv 0 \pmod{4}$, denn für $k \equiv 2 \pmod{4}$ ist B_k positiv, also der Limes der rechten Seite für $n \rightarrow \infty$ negativ (da das Koeffizientenwachstum der Eisensteinreihe das der Spitzenform dominiert) im Widerspruch zur Tatsache, dass stets $R_Q(n) \geq 0$. Die Wachstumsaussage für $k \equiv 0 \pmod{4}$ folgt ebenfalls hieraus.

Ist m ungerade, so ist $4m$ ein ungerades Vielfaches von 4 und wir können obigen Widerspruchsbeweis auf $Q \oplus Q \oplus Q \oplus Q$ anwenden. Ist $m = 2k$ und k ungerade, so ist $2m$ ein ungerades Vielfaches von 4 und wir können den Widerspruchsbeweis auf $Q \oplus Q$ anwenden. \square

Aufgabe 5.1 (4 Punkte)

Wir definieren die Γ -Funktion als

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{dt}{t}, \quad s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > 0.$$

- i) Zeigen Sie, dass $\Gamma(1) = 1$.
- ii) Zeigen Sie, dass $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
- iii) Zeigen Sie, dass $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ für $\operatorname{Re}(s) > 1$.
- iv) Beweisen Sie, dass sich Γ meromorph auf ganz \mathbb{C} mit einfachen Polen an jeder nicht-positiven ganzen Zahl fortsetzen lässt und dass die Residuen

$$\operatorname{Res}_{s=-n} \Gamma(s) = \frac{(-1)^n}{n!}$$

gilt.

Aufgabe 5.2 (4 Punkte)

Die Mellin-Transformation einer Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$g(s) := \int_0^\infty f(t) t^s \frac{dt}{t},$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ für die das Integral absolut konvergiert.

- i) Beweisen Sie, dass die Mellin-Transformierte von $\frac{1}{2}(\theta(it) - 1) = \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t}$ für $t > 0$ durch

$$g(s) = \xi(s) := \pi^{-s} \Gamma(s) \zeta(2s), \quad \operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$$

gegeben ist.

- ii) Benutzen Sie ohne Beweis, dass sich $\xi(s)$ meromorph auf ganz \mathbb{C} mit einfachen Polen in $s = 0$ und $s = 1$ mit Residuen -1 und 1 fortsetzen lässt. Beweisen Sie, dass die Riemann'sche Zeta-Funktion $\zeta(s)$ sich meromorph auf ganz \mathbb{C} mit einfachen Polen in $s = 1$ mit Residuum 1 und einfachen Polen in $s = -2, -4, -6, \dots$ fortsetzen lässt.

Literatur

- [CMZ16] D. Chen, M. Möller und Zagier. *Siegel-Veech constants: quasimodularity and large genus limits*. 2016. eprint: preprint, arXiv:AG/1606.04065.
- [FB09] Eberhard Freitag und Rolf Busam. *Complex analysis*. Second. Universitext. Berlin: Springer-Verlag, 2009, S. x+532. ISBN: 978-3-540-93982-5. DOI: 10.1007/978-3-540-93983-2. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-93983-2>.
- [HI89] J. Hafner und A. Ivić. "On sums of Fourier coefficients of cusp forms". In: *Enseign. Math. (2)* 35.3-4 (1989), S. 375–382. ISSN: 0013-8584.
- [KK07] Max Koecher und Aloys Krieg. *Elliptische Funktionen und Modulformen*. revised. Berlin: Springer-Verlag, 2007, S. viii+331. ISBN: 978-3-540-49324-2.
- [Zag08] Don Zagier. "Elliptic modular forms and their applications". In: *The 1-2-3 of modular forms*. Universitext. Berlin: Springer, 2008, S. 1–103. DOI: 10.1007/978-3-540-74119-0_1. URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-74119-0_1.

Stichwortverzeichnis

Bernoulli-Zahlen, 21

Covolumen, 5

doppelt periodisch, 3, 10

Durchmesser, 6

Eisensteinreihe, 11

elliptische Funktion, 3, 10

Fourier-Entwicklung, 21

Fundamentalebene, 25

Fundamentalmasche, 5

Gitter, 3, 4

Gitterbasis, 4

Lemniskate, 2

meromorph, 7

Ordnung

einer Polstelle, 7

Periode, 8

periodisch, 2

rationale, 21