

## Übung 2

Abgabe bis Donnerstag, 16.11.

### Aufgabe 3: [Ein Binomialverfahren für zwei Wertpapiere]

Ein Binomialbaum für zwei Wertpapiere, wobei die  $(x, y)$ -Koordinaten die Wertpapiere und  $t$  die Zeitkoordinate darstellen, kann folgendermaßen erstellt werden. Jeder Knoten  $(x, y)$  geht für  $t \rightarrow t + \Delta t$  mit gleicher Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{4}$  in einen der vier Knoten

$$(xu, yA), (xu, yB), (xd, yC), (xd, yD)$$

für Konstanten  $u, d, A, B, C, D$  über.

- (a) Zeigen sie, dass der Baum für  $AD = BC$  rekombinierend ist.

Sei nun  $r$  die risikofreie Zinsrate,  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  die Volatilitäten der beiden Wertpapiere und  $\rho$  ihre Korrelation, dann können die sechs Konstanten  $u, d, A, B, C, D$  wie folgt ermittelt werden:

$$\begin{aligned}
 \mu_i &= r_i - \sigma_i^2/2 \quad \text{für } i = 1, 2 \\
 u &= \exp(\mu_1 \Delta t + \sigma_1 \sqrt{\Delta t}) \\
 d &= \exp(\mu_1 \Delta t - \sigma_1 \sqrt{\Delta t}) \\
 A &= \exp(\mu_2 \Delta t + \sigma_2 \sqrt{\Delta t}(\rho + \sqrt{1 - \rho^2})) \\
 B &= \exp(\mu_2 \Delta t + \sigma_2 \sqrt{\Delta t}(\rho - \sqrt{1 - \rho^2})) \\
 C &= \exp(\mu_2 \Delta t - \sigma_2 \sqrt{\Delta t}(\rho - \sqrt{1 - \rho^2})) \\
 D &= \exp(\mu_2 \Delta t - \sigma_2 \sqrt{\Delta t}(\rho + \sqrt{1 - \rho^2}))
 \end{aligned}$$

Für Startwerte  $x^0 = S_1^0, y^0 = S_2^0$  und zum Zeitpunkt  $t_\nu = \nu \Delta t$  können die  $S_1$ -Komponenten des Baums wie im eindimensionalen Fall ermittelt werden:

$$x_i^\nu = S_1^0 u^i d^{\nu-i} \quad \text{für } i = 0, \dots, \nu$$

- (b) Überprüfen sie, dass die obige Wahl von  $A, B, C, D$  einen rekombinierenden Baum ergibt.
- (c) Zeigen sie, dass die  $S_2$ -Komponenten des Baums, die zu  $x_i^\nu$  gehören, durch

$$y_{i,j}^\nu = S_2^0 \exp(\mu_2 \nu \Delta t) \exp(\sigma_2 \sqrt{\Delta t}(\rho(2i - \nu) + \sqrt{1 - \rho^2}(2j - \nu))) \quad \text{für } j = 0, \dots, \nu$$

gegeben sind. Anmerkung: für  $\nu \rightarrow \nu + 1$  entspricht  $u$  einer Erhöhung des Index  $i \rightarrow i + 1$ , während  $d$  einem gleichbleibenden Index  $i \rightarrow i$  entspricht.

- (d) Zeigen sie, dass die Erwartungswerte, Varianzen und Kovarianzen des kontinuierlichen und des diskreten Modells übereinstimmen. Überprüfen sie dazu für die logarithmischen Inkremente  $\Delta Y_1 = \log u$  (bzw.  $\log d$ ) und  $\Delta Y_2 = \log A$  (bzw.  $\log B, \log C$  oder  $\log D$ ) die fünf Gleichungen

$$E(\Delta Y_i) = \mu_i \Delta t, \quad \text{Var}(\Delta Y_i) = \sigma_i^2 \Delta t, \quad \text{Cov}(\Delta Y_1, \Delta Y_2) = \rho \sigma_1 \sigma_2 \Delta t$$

für  $i = 1, 2$  erfüllt sind.