



Übung 4

Abgabe bis Freitag, 17.11.2017, 9.45 Uhr

Aufgabe 1: [Äquivalenzrelationen]

(a) Untersuche, ob für $x, y \in X$ die folgenden Relationen Äquivalenzrelationen sind:

- (1) $X = \mathbb{R}; \quad x \sim y :\iff x \leq y;$
- (2) $X = \mathbb{R}; \quad x \sim y :\iff x \neq y;$
- (3) $X = \mathbb{R}^n; \quad (x_1, \dots, x_n) \sim (y_1, \dots, y_n) :\iff x_1^2 + \dots + x_n^2 = y_1^2 + \dots + y_n^2;$
- (4) $X = \mathbb{Z}; \quad x \sim y :\iff (x-y)$ ist durch $m \in \mathbb{N}$ teilbar (d.h. es existiert ein $n \in \mathbb{Z}$, sodass $(x-y) = m \cdot n$).

(b) Sei $X = \{a, b, c, d, e, f\}$. Ergänze die Menge $\{(e, e), (f, d), (c, a), (b, f)\}$ durch Hinzufügen möglichst weniger Paare zu einer Äquivalenzrelation auf X und bestimme alle Äquivalenzklassen.

Punkte:

Aufgabe 2: [Bild und Urbild]

Sei $f : X \rightarrow Y$, $A_1, A_2 \subseteq X$ und $B_1, B_2 \subseteq Y$. Zeige:

- (a) $A_1 \subseteq A_2 \implies f(A_1) \subseteq f(A_2)$
- (b) $B_1 \subseteq B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$

Punkte:

Aufgabe 3: [Abbildungen]

Seien X, Y, Z Mengen und $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen. Zeige:

- (a) Sind f und g beide injektiv, so ist auch die Komposition $g \circ f$ injektiv.
- (b) Sind f und g beide surjektiv, so ist auch die Komposition $g \circ f$ surjektiv.
- (c) Ist $g \circ f$ bijektiv, so ist g surjektiv und f injektiv.

Punkte:

Aufgabe 4: [Prozeduren in Sage]

Schreibe eine Sage-Prozedur `Quersumme(n)`, die die Quersumme einer natürlichen Zahl n berechnet. Testen sie die Prozedur mit der Zahl 357689.

Punkte:

Aufgabe 5: [Funktionen in Sage]

- (a) Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes der Funktionen $g(x) = 2 - \sin(1 - x)$ und $h(x) = 2x$. Stelle außerdem die beiden Funktionen graphisch dar.
- (b) Erstelle eine Kurvendiskussion für die Funktion

$$f(x) = -2x^3 + x^2 + 2x.$$

Bestimme dazu die Schnittpunkte der Funktion mit den Achsen sowie die Extremwerte und Wendepunkte der Funktion. Plote nun die Funktion f und zeichne die Tangente an den Wendepunkten in den Plot ein.

Punkte:

Gesamtpunktzahl: 34 Punkte