Übung 7

Abgabe bis Freitag, 8.12.2017, 9.45 Uhr

Aufgabe 1: [Halbordnung]

Sei A ein (endliches) Alphabet, sei $L^n := \{()\} \cup \bigcup_{j \leq n} A^j$ die Menge der Wörter mit maximaler Länge $n \in \mathbb{N}$ über dem Alphabet A. Für zwei Worte $u = (u_1, \ldots, u_k) \in A^k$,$v = (v_1, \ldots, v_l) \in A^l$ setzen wir:

$$u \circ v := (u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_l) \in A^{k+l}.$$

Wir definieren für $u, v \in L^n$:

$$u \leq v :\Longleftrightarrow \text{ Es gibt ein } z \in L^n \text{ mit } u \circ z = v.$$

(a) Zeigen sie: $\leq$ ist eine Halbordnung in L^n.

(b) Definiert $\leq$ auch eine Ordnung in L^n?

(c) Gibt es in L^n ein Wort w, so dass gilt
$$w \leq u \text{ für alle } u \in L^n?$$

(d) Gibt es in L^n ein Wort w, so dass gilt
$$w \geq u \text{ für alle } u \in L^n?$$

Punkte: $\boxed{12}$

Aufgabe 2: [Latex]
Schreiben sie den folgenden Text in Latex:

Satz: Die Folge

$$x_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

ist eine Cauchy-Folge.

Beweis. Zu zeigen ist: $\forall \epsilon > 0 \; \exists \; N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_m| < \epsilon$, $\forall m, n > N$. Also:

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &= \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} \right| && (1)\\
&= \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k^2} && (2)\\
&< \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k(k-1)} && (3)\\
&= \sum_{k=m}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) && (4)\\
&= \frac{1}{m-1} - \frac{1}{n} \stackrel{!}{<} \epsilon.
\end{aligned}$$

Punkte: $\boxed{10}$

Aufgabe 3: [Latex]

Erstellen sie mit LaTeX ein PDF-Dokument, welches folgenden Inhalt besitzt: Punkte: $\boxed{12}$

Einführung in die computerorientierte
Mathematik

Vorname Nachname
Tutoriumszeit
Tutorname

Vorname Nachname Einführung in die computerorientierte Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Goethe Universität Frankfurt am Main

Vorname Nachname Einführung in die computerorientierte Mathematik

1 Übung 7

1.1 Aufgabe 2

Satz: Die Folge

$$x_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

ist eine Cauchy-Folge.

Beweis. Zu zeigen ist: $\forall \epsilon > 0 \; \exists \, N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_m| < \epsilon, \forall m, n > N$. Also:

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &= \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} \right| && (1.1)\\
&= \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k^2} && (1.2)\\
&< \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k(k-1)} && (1.3)\\
&= \sum_{k=m}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) && (1.4)\\
&= \frac{1}{m-1} - \frac{1}{n} \overset{!}{<} \epsilon.
\end{aligned}$$

Goethe Universität Frankfurt am Main

Vorname Nachname Einführung in die computerorientierte Mathematik

Literatur

[1] Theobald, Thorsten; Iliman, Sadik. *Einführung in die computerorientierte Mathematik mit Sage*. Springer-Verlag, 2016.

Goethe Universität Frankfurt am Main

Gesamtpunktzahl: 34 Punkte