Übung 4

Abgabe bis Donnerstag, 14.12.

Aufgabe 6: [Berechnung der kumulativen Normalverteilung]

Es gibt eine Reihe von Methoden zur Approximation des Integrals

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt.$$

Es sollen nun zwei dieser Methoden verglichen werden.

(a) Konstruieren sie einen Algorithmus zur Berechnung der Fehlerfunktion

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} \int_{0}^{x} e^{-t^2}\, dt$$

und nutzen sie $\operatorname{erf}(x)$ zur Berechnung von $\Phi(x)$. Verwenden sie dabei als Quadraturverfahren die zusammengesetzte Trapezregel mit n Schritten. Beschleunigen sie die Konvergenz mit Romberg-Extrapolation.

(b) Eine weitere Methode (von Hastings) verwendet den Ansatz

$$\tilde{\Phi}(x) = 1 - f(x)z((((a_5 z + a_4)z + a_3)z + a_2)z + a_1)$$

wobei

$$z = \frac{1}{1 + 0.2316419x}$$

und

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.319381530 & a_4 &= -1.821255987 \\ a_2 &= -0.356563782 & a_5 &= 1.330274429 \\ a_3 &= 1.781477937 \end{aligned}$$

gewählt werden. Für $x > 0$ stellt $\tilde{\Phi}(x)$ eine Approximation von $\Phi(x)$ mit einem absoluten Fehler von höchstens 10^{-7} dar. Für $x < 0$ wird die Darstellung $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$ genutzt. Konstruieren sie damit einen Algorithmus zur näherungsweisen Berechnung von $\Phi(x)$.

(c) Implementieren sie beide Verfahren und vergleichen sie hinsichtlich Aufwand und Genauigkeit. Als Referenzlösung können sie die Matlab-Funktion `derf` verwenden. Plotten sie Rechenzeit und Fehler in einen doppelt-logarithmischen Plot.