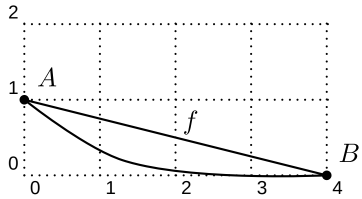
# Miniprojekt 3

**Abgabe bis Freitag, 26.1.2018, 9.45 Uhr**

## Das Brachistochrone-Problem

Wir betrachten das Brachistochrone-Problem. Das Problem, welches Johann Bernoulli im Jahre 1696 veröffentlichte, sucht eine Kurve $f$ die zwei Punkte $A$ und $B$ so verbindet, dass eine Kugel auf dem schnellstmöglichen Weg von dem Punkt $A$ zu dem tiefergelegenen und rechts verschobenen Punkt $B$ nur unter Einfluss der Schwerkraft ohne Reibung gleitet.




Um das Problem zu modellieren suchen wir eine Formel, die die benötigte Zeit der Kugel zwischen $A = (x_A, y_A)$ und $B = (x_B, y_B)$ berechnet. Die Geschwindigkeit ist physikalisch durch

$$v = \frac{ds}{dt},$$

also dem Weg $s$ pro Zeit $t$ definiert. Für die Geschwindigkeit $v$ gilt die folgende Formel des freien Falles

$$v = \sqrt{2g\,(f(x_A) - f(x))},$$

wobei $g$ für die Erdbeschleinigung steht und $f : [x_A, x_B] \to \mathbb{R}$ für eine frei wählbare Funktion.

a) Leiten sie mit Hilfe des Satzes des Pythagoras die Länge

$$s = \int_z^{z+\Delta} \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

eines Kurvenstückes in einem Teilintervall der Länge $\Delta$ her.

b) Leiten sie aus obigen Überlegungen die folgende Formel für die benötigte Zeit $T = \int_{x_A}^{x_B} dt$ der Kugel her:

$$T(f) = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}{\sqrt{2g\,(f(x_A) - f(x))}}dx.$$

Beim Brachistochrone-Problem wird daher eine Funktion $f$ gesucht, welche das Funktional $T(f)$ minimiert.
Im Folgenden werden wir die festen Punkte $A = (0, 1)$ und $B = (4, 0)$ betrachten.

c) Berechnen sie die benötigte Zeit, wenn sie die Punkte $A$ und $B$ durch eine Gerade $f(x) = ax + b$ verbinden. Bestimmen sie dazu zunächst $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $f(x_A) = y_A$ und $f(x_B) = y_B$ gilt.

d) Schreiben sie eine Funktion *my_integration(n)* mit einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ als Input, zur numerischen Auswertung eines Integrals:

$$\int_0^4 g(x)dx \approx h \sum_{i=1}^{n} g\left(i \cdot h - \frac{h}{2}\right),$$

wobei $h = \frac{4}{n}$.

e) Berechnen sie die benötigte Zeit für die Funktion aus c) numerisch mit dem Verfahren aus d) für $n = 10$, $n = 100$ und $n = 1000$ aus und vergleichen sie die Ergebnisse mit der von ihnen exakt berechneten Lösung.

f) Verbinden sie die Punkte $A$ und $B$ nun mit einer Sinusfunktion und einer Wurzelfunktion der Form:

$$f(x) = \sin(ax) + b,$$
$$f(x) = a\sqrt{x} + b,$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$. Bestimmen sie dazu jeweils $a$ und $b$ so, dass $f(x_A) = y_A$ und $f(x_B) = y_B$ gilt. Berechnen sie mittels der numerischen Integration aus d) mit $n = 1000$ die benötigte Zeit der Kugel für die jeweiligen Funktionen.

g) Plotten sie die Lösungen für die Gerade, Sinus- und Wurzelfunkltion in einem gemeinsamen Plot.

h) Schreiben sie ein LaTeX-Dokument mit Titelseite und einer Dokumentation ihrer Ergebnisse, sowie dem vollständigen Lösungsweg der einzelnen Teilaufgaben.

Bonusaufgabe: Bestimmen sie mit einem selbst erstellten Computerprogramm die Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass die benötigte Zeit der Kugel mit der Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ möglichst klein ist. Die besten 5 eingegangenen Lösungen erhalten jeweils 10 Extrapunkte.

Anmerkung: Die optimale Lösung des Brachstrone-Problems ist eine Zykloide.

**Gesamtpunktzahl: 4/2/3/5/2/8/2/9=35 Punkte**