

Übung 3

Abgabe bis Dienstag, 29.5. 13:45 Uhr

Aufgabe 4: [Stochastik]

- (a) Konstruieren sie zwei Zufallsvariablen, die unkorreliert, aber nicht unabhängig sind.
- (b) Für Zufallsvariablen $X, Y \in L^2$ sowie $a, b \in \mathbb{R}$ sei

$$\hat{Y}_{a,b} = a + bX$$

und es gelte $\sigma(X) > 0$ sowie $\sigma(Y) > 0$. Zeigen sie, dass

$$\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \mathbb{E} \left(Y - \hat{Y}_{a,b} \right)^2 = \mathbb{E} \left(Y - \hat{Y}_{a^*,b^*} \right)^2 = \sigma^2(Y) \cdot (1 - \rho^2(X, Y))$$

mit

$$a^* = \mathbb{E}(Y) - b^* \mathbb{E}(X), \quad b^* = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma^2(X)}$$

gilt.

Aufgabe 5: [Ruinproblem]

Das klassische Ruinproblem basiert auf einer unabhängigen Folge von Zufallsvariablen V_t , die jeweils die Verteilung

$$P(\{V_t = 1\}) = p, \quad P(\{V_t = -1\}) = 1 - p$$

mit $p \in (0, 1)$ besitzen und angeben, ob ein Spieler in Runde t gewinnt oder verliert. Setzt der Spieler pro Runde den Einsatz 1 und bezeichnet $n \in \mathbb{N}$ sein Startkapital, so ist

$$X_t = x + \sum_{s=1}^t V_s$$

sein Kapital nach t Runden. Wenn $z \in \mathbb{N}$ mit $z > x$ das angestrebte Zielkapital des Spielers ist, so lässt sich das Spielende durch die Eintrittszeit

$$T = \inf\{t \in \mathbb{N} \mid X_t \in \{0, z\}\}$$

definieren. Für $t, x \in \mathbb{N}$ sei

$$f(x, t) = P(\{T \leq t\} \cap \{X_T = z\})$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Spieler mit Startkapital x bis zur Zeit t sein Zielkapital z erreicht hat.

- (a) Beweisen sie für $t \geq 2$ die Rekursionsformel

$$f(x, t) = p \cdot f(x + 1, t - 1) + (1 - p) \cdot f(x - 1, t - 1).$$

- (b) Entwickeln und implementieren sie einen Algorithmus zur Berechnung und grafischen Darstellung der Funktion $x \mapsto f(x, t)$.

Aufgabe 6: [Kasino]

Ein Kasino bietet folgendes Roulette-Spiel an: In jeder Spielrunde erhält ein Spieler mit Wahrscheinlichkeit $p = \frac{18}{37}$ den verdoppelten Einsatz oder verliert mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ seinen Einsatz. Sie spielen dieses Spiel mit einem Startkapital von x Euro und der folgenden Strategie:

- Ihr Starteinsatz beträgt 1 Euro.
 - Verlieren sie, so verdoppeln sie ihren Einsatz; wenn sie nicht mehr verdoppeln können, setzen sie ihr gesamtes restliches Vermögen ein.
 - Gewinnen sie, so starten sie wieder mit einem Einsatz von 1 Euro.
 - Das Spiel endet, wenn sie kein Geld mehr haben, oder bei z Euro angekommen sind.
- (a) Schreiben sie ein Programm in einer Programmiersprache ihrer Wahl, welches für Inputparameter Startkapital x , Abbruchkapital z und Simulationsanzahl n dieses Spiel n Mal simuliert und am Ende die geschätzte Gewinnwahrscheinlichkeit

$$\hat{p} = \frac{\text{\#erfolgreicheSpiele}}{n}$$

ausgibt.

- (b) Testen sie ihr Programm für $x = 100$, $z = 200$ und $n = 100, 1.000, 10.000, 100.000$.
- (c) Was folgern sie daraus für ihre Spielstrategie?