Übung 1

Abgabe bis Donnerstag, 1.11., 11:45 Uhr

Aufgabe 1: [Fehlerfortpflanzung]

Wir wollen nun die Fortpflanzung von Fehlern bei der Durchführung der vier arithmetischen Grundoperationen $(+, -, \cdot, /)$ betrachten. Die Zahlen x und y seien mit Fehlern Δx und Δy behaftet, wobei $|\frac{\Delta x}{x}|, |\frac{\Delta y}{y}| \ll 1$ gelte. Zeigen Sie, dass selbst bei exakter Rechnung (also ohne weitere Rundungsfehler) für die relativen Fehler der Ergebnisse die folgenden Aussagen gelten:

(a) $$\frac{(x+\Delta x)+(y+\Delta y)-(x+y)}{x+y} = \frac{x}{x+y}\cdot\frac{\Delta x}{x} + \frac{y}{x+y}\cdot\frac{\Delta y}{y}$$

(b) $$\frac{(x+\Delta x)-(y+\Delta y)-(x-y)}{x-y} = \frac{x}{x-y}\cdot\frac{\Delta x}{x} - \frac{y}{x-y}\cdot\frac{\Delta y}{y}$$

(c) $$\frac{(x+\Delta x)\cdot(y+\Delta y)-(x\cdot y)}{x\cdot y} \approx \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$$

(d) $$\frac{(x+\Delta x)/(y+\Delta y)-(x/y)}{x/y} \approx \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta y}{y}$$

(e) Falls der relative Fehler des Ergebnisses sehr viel größer ist, als der relative Fehler der Eingabedaten, so spricht man von Auslöschung. In welchen der obigen Fälle kann Auslöschung auftreten?

Punkte: 10

Aufgabe 2: [Rundung]

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Ausdrücke mathematisch äquivalent sind:

- $((a+b)(a-b))^2$
- $(a^2+b^2)^2 - 4(ab)^2$
- $(a^2-b^2)^2$

(b) Seien nun $a = 10^6 + 1$ und $b = 10^6 - 2$. Berechnen Sie obige Ausdrücke mit 10 Dezimalstellen. Runden Sie dabei nach *jedem* Rechenschritt das Teilergebnis.

(c) Berechnen Sie jeweils den relativen Fehler der Resultate (2 gültige Ziffern genügen). Was ist der Grund für dieses Verhalten?

Punkte: 10

Aufgabe 3: [Fehleranalyse bei Rekursion]

Gegeben sei die Folge $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $y_i = \dfrac{1}{e}\displaystyle\int_0^1 e^x x^i \mathrm{d}x$.

(a) Zeigen Sie die Abschätzungen

$$\frac{1}{e(i+1)} < y_i < \frac{1}{i+1} \qquad \text{und} \qquad y_{i+1} < y_i.$$

(b) Bestimmen Sie je eine Vorwärts- und eine Rückwärtsrekursionsformel, mit der der Wert y_i aus y_{i-1} bzw. y_{i+1} bestimmt werden kann.

Mit der Vorwärtsrekursionsformel lassen sich somit sukzessiv die Folgenglieder $y_1, y_2, y_3, \ldots$ berechnen, falls der Startwert y_0 bekannt ist. Entsprechend lassen sich mit der Rückwärtsrekursionsformel die Folgenglieder $y_{k-1}, y_{k-2}, \ldots, y_0$ berechnen, falls ein Startwert y_k mit $k \in \mathbb{N}$ bekannt ist.

(c) Anstelle der exakten Startwerte y_0 bzw. y_k seien genäherte Startwerte $\tilde{y}_0$ bzw. $\tilde{y}_k$ gegeben. Wie lauten die absoluten Fehler $\Delta y_i = y_i - \tilde{y}_i$ bei Vorwärts- und Rückwärtsrekursion in Abhängigkeit von Δy_0 bzw. Δy_k?

Punkte: $\boxed{10}$

Aufgabe 4: [Programmieraufgabe]

Schreiben Sie ein Scilab- oder Matlab-Programm, das die Werte $y_0, y_1, \ldots, y_k$ aus Aufgabe 3 für $k = 30$ mittels Vorwärts- und Rückwärtsrekursion berechnet. Verwenden Sie als Startwert für die Vorwärtsrekursion den exakten Wert

$$y_0 = \frac{e-1}{e}$$

und als Startwert für die Rückwärtsiteration die Werte

$$y_k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e(k+1)} + \frac{1}{k+1}\right) \qquad \text{und} \qquad y_k = 10^6,$$

also das arithmetische Mittel der Abschätzungen oben und einen vollkommen schlechten Wert. Stellen Sie die Ergebnisse tabellarisch dar und beurteilen Sie sie im Hinblick auf Aufgabe 3(c).

Punkte: $\boxed{10}$

Gesamtpunktzahl: 40 Punkte