Übung 8

Abgabe bis Donnerstag, 20.12., 11:45 Uhr

Aufgabe 1: [Quadratur von Polynomen]

(a) Zeigen sie, dass die Simpson–Regel für alle Polynome vom Grad 3 exakt ist, d.h. für alle kubischen Polynome P gilt:

$$\int_a^b P(x)\ dx = \frac{b-a}{6}P(a) + \frac{2(b-a)}{3}P\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{b-a}{6}P(b).$$

(b) Wir betrachten nun das Integral eines normierten quartischen Polynoms Q, d.h.

$$I(f) = \int_a^b Q(x)\ dx \quad \text{mit} \quad Q(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

(mit $a_i \in \mathbb{R}$ für $i = 0, 1, 2, 3$). Zur näherungsweisen Berechnung von I soll die Simpsonsumme $S(h)$ mit Intervall–Länge h verwendet werden. Zeigen sie, dass dann für den Integrationsfehler

$$I(f) - S(h) \leq (b-a)\frac{h^4}{120}$$

gilt.

Punkte: $\boxed{6}$

Aufgabe 2: [Anwendung von Quadraturformeln]

Betrachten sie das Integral

$$I(f) = \int_0^2 \frac{2}{x^2+4}\ dx.$$

(a) Berechnen sie $I(f)$ mit der Trapezregel und der Simpsonregel.

(b) Schätzen sie jeweils den Integrationsfehler ab und vergleichen sie die Abschätzung mit dem wirklichen Fehler.

(c) Berechnen sie $I(f)$ mit der Trapezsumme und der Simpsonsumme für $h = \frac{1}{2}$.

(d) Schätzen sie auch hier jeweils den Integrationsfehler ab und vergleichen sie die Abschätzung mit dem wirklichen Fehler.

(e) Wie klein müsste jeweils h gewählt werden, damit der Integrationsfehler kleiner als 10^{-6} wird?

Punkte: $\boxed{12}$

Aufgabe 3: [Programmieraufgabe]

(a) Schreiben sie eine Scilab oder MATLAB Funktion, die das Integral

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

mithilfe der Trapezsumme für eine vorgegebene Schrittweite h ausrechnet. Berechnen sie das Integral für $h = 10^{-2}$ und $h = 10^{-1}$.

(b) Erweitern sie ihre Scilab oder MATLAB Funktion, sodass sie einen 2-dimensionalen Plot ausgibt, welcher den Integrationsfehler gegen die Schrittweite h darstellt. Zur Berechnung des exakten Integralwertes kann die Scilab oder MATLAB Funktion `erf` verwendet werden. Versuchen sie, durch 'Vektorisierung' mit möglichst wenig Schleifen auszukommen. Verwenden sie außerdem die doppelt-logarithmische (log-log) Darstellung. Welchen Schluss läßt diese Darstellung zu?

(c) Verändern sie ihre Scilab oder MATLAB Funktion, sodass die zu integrierende Funktion als Argument im Funktionsaufruf übergeben werden kann. Schlagen sie dazu die Scilab oder MATLAB Hilfe unter dem Stichwort 'deff' nach oder nutzen sie die Scilab oder MATLAB Funktion `feval`.

Punkte: $\boxed{10}$

Gesamtpunktzahl: 28 Punkte