GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Einführung in die Numerik
WS 2018/19
Prof. Dr. Thomas Gerstner

Übung 10

Abgabe bis Donnerstag, 23.01., 11:45 Uhr

Aufgabe 1: [p–Vektornormen]

Die p–Norm eines reellen Vektors $v = (v_i)_{i=1,\dots,n}$ ist für $p \in \mathbb{N}$ definiert als $\|v\|_p = \left(\sum |v_i|^p\right)^{1/p}$ und für $p = \infty$ als $\|v\|_\infty = \max |v_i|$. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:

(a) $\lim\limits_{p\to\infty} \|v\|_p = \|v\|_\infty$

(b) $\|v\|_1 \geq \|v\|_p \geq \|v\|_\infty$

(c) $\|v\|_p \geq \|v\|_q$ für $p < q$

Punkte: $\boxed{9}$

Aufgabe 2: [p–Matrixnormen]

Die p-Norm einer reellen, quadratischen Matrix ist definiert durch $\|A\|_p = \max\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$, wobei $\|x\|_p$ die p-Norm des Vektors x ist.

(a) Berechnen Sie $\|A\|_1$, $\|A\|_2$ und $\|A\|_\infty$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie nun allgemein die Eigenschaften:

(b) $\|A\|_p = \max\limits_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p$

(c) $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$

Punkte: $\boxed{9}$

Aufgabe 3: [Matrixnormen]

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ reelle quadratische Matrizen.

(a) Zeigen Sie, dass die Matrixnorm $\|\cdot\|$ submultiplikativ ist, d.h. $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

(b) Sei nun $\|A\| < 1$ und $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix. Zeigen Sie, dass dann $(I + A)^{-1}$ existiert und die Abschätzung $\|(I + A)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1 - \|A\|}$ gilt.

Punkte: $\boxed{6}$

Aufgabe 4: [Frobenius–Norm]

Die Frobenius–Norm einer reellen, quadratischen Matrix ist definiert als $\|A\|_F = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(a_{ij})^2}$. Zeigen Sie die Eigenschaften:

(a) $\|A\|_F^2 = \mathrm{spur}(A^T A) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(A^T A)$

(b) $\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$

(c) $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_2$

Punkte: $\boxed{9}$

Gesamtpunktzahl: 32 Punkte