

Übung 1

Abgabe bis Dienstag, 29.10.

Aufgabe 1: [Diskrete Dividenden]

Ein Wertpapier S zahle eine feste Dividende D zum Zeitpunkt t_D mit $0 < t_D < T$.

- (a) Angenommen, die Dividende wird einmal jährlich gezahlt ($T = 1$). Berechnen sie die zugehörige kontinuierliche Dividendenrate δ unter den Annahmen

$$\dot{S} = (\mu - \delta)S, \quad \mu = 0, \quad S(1) = S(0) - D > 0.$$

Verallgemeinern sie ihr Ergebnis auf allgemeine Driftraten μ und allgemeine Laufzeiten T

- (b) Betrachten sie für eine Amerikanische Put-Option mit Ausübungspreis K den Zeitpunkt

$$\tilde{t} = t_D - \frac{1}{r} \log \left(\frac{D}{K} + 1 \right).$$

Zeigen sie, dass es für $S = 0, r > 0, D > 0$ zu jedem Zeitpunkt t mit $\tilde{t} < t < t_D$ vorteilhaft ist, auf die Dividende zu warten, anstatt vorzeitig auszuüben.

- (c) Sei N_i die Anzahl der Knoten eines Standard- (nicht rekombinierenden) Binomialbaums zum Zeitpunkt t_i , wobei t_k der Zeitpunkt der Dividendenzahlung ist. Zeigen sie, dass für $i > 0$ gilt:

$$N_{k+i} = (i + 1)(k + 1).$$

Aufgabe 2: [Programmieraufgabe]

- (a) Programmieren sie den Algorithmus aus der Vorlesung zur Optionspreisbewertung mit (rekombinierenden) Binomialbäumen im Fall diskreter Dividenden in einer Programmiersprache ihrer Wahl.
- (b) Testen sie den Algorithmus anhand einer Amerikanischen Put-Option mit den Parametern $T = 0.5, S_0 = 50, K = 55, r = 0.1, \sigma = 0.4, D = 5$ und $t_D = 0.31$. Wenden sie zur Zeitdiskretisierung $M = 10$ Zeitschritte.
- (c) Plotten sie die Knoten des resultierenden S -Baums.
- (d) Bestimmen sie die Konvergenzrate des Verfahrens, indem sie M sukzessive verdoppeln ($M = 10, 20, 40, 80, 160, 320$). Plotten sie hierzu den Fehler gegen den Aufwand in einen doppelt-logarithmischen Plot. Verwenden sie als „exakte“ Lösung den berechneten Optionspreis für $M = 320$