GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

**Computational Finance 2**
**WS 2019/20**
**Prof. Dr. Thomas Gerstner**

# Übung 6

**Abgabe bis Dienstag, 28.01.**

**Aufgabe 8:** [Multilevel Monte Carlo]

Wir setzen die folgende Konvergenzaussage für das Euler-Maruyama Verfahren $X_k$ mit der Schrittweite $\tau$, der Konstanten $C > 0$ und der Lösung der stochastischen Differentialgleichung $S$ voraus:

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le k\tau\le T} |S(k\tau) - X_k|^2\right) \le C\tau \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Die Auszahlungsfunktion von diskreten Asiatischen Optionen ist sowohl Lipschitz stetig im Endzeitpunkt als auch an den endlich vielen Zeitpunkten $T_m$, für $m = 1, 2, 3, \ldots, M$, an denen die Option gemittelt wird, d.h. es gilt

$$\left| f(S_1^{(2)}, S_2^{(2)}, \ldots, S_M^2) - f(S_1^{(1)}, S_2^{(1)}, \ldots, S_M^1) \right| \le L \sum_{m=1}^{M} \left| S_m^{(2)} - S_m^{(1)} \right|,$$

mit der Lipschitz-Konstanten $L > 0$. Zeigen sie, dass $\mathbb{V}[|P - \hat{P}_l|]$ von Ordnung $\mathcal{O}(\tau_l)$ ist.

b) Um in kontinuierlicher Zeit zu arbeiten betrachten wir den stückweise linearen Interpolanten des Euler-Maruyama Verfahrens $\overline{X}(t)$ gegeben durch

$$\overline{X}(k\tau + \theta\tau) = (1-\theta)X_k + \theta X_{k+1} \quad \text{für } 0 \le \theta \le 1, k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Für $\overline{X}(t)$ gelte die folgende Konvergenzeigenschaft:

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T} \left|S(t) - \overline{X}(t)\right|^2\right) \le C\tau^{1-\delta}.$$

Bestimmen sie die Ordnung von $\mathbb{V}[|P - \hat{P}|]$ für eine Lookback Option welche durch

$$\hat{P} = \overline{X}(T) - \inf_{0\le t\le T} \overline{X}(t),$$

numerische approximiert wird.

c) Angenommen es würden die folgenden stärkeren Konvergenzeigenschaften gelten:

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le k\tau\le T} |S(k\tau) - X_k|^2\right) \le C\tau^2.$$

Bestimmen sie die Ordnung von $\mathbb{V}[|P - \hat{P}|]$ für Europäische Optionen unter dieser Voraussetzung.