Einführung in Mathematisches Denken und Arbeiten

Skript zum Vorkurs Mathematik für Mathematikstudierende

Institut für Mathematik – Goethe Universität Frankfurt

Theresa Kumpitsch

(kumpitsch@math.uni-frankfurt.de)

4. Oktober 2021

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

Der Titel "Einführung ins Mathematische Denken und Arbeiten" dieses Kurzskriptes ist irreführend. Ein einwöchiger Kurs kann so etwas gar nicht leisten. Gedacht ist der Kurs als ein Vorkurs für angehende Mathematikstudierende ohne Erfahrung mit Mathematik an der Uni. Ein passenderer Titel wäre vielleicht "Ein Versuch, den Einstieg in die Hochschulmathematik einfacher zu machen".

Im ersten Semester eines Mathematikstudiums merkt man schnell: es gibt einen großen Unterschied zwischen dem Mathematikunterricht in der Schule und der Mathematik, wie man sie an der Universität lernt bzw. lehrt. Während Schulmathematik sich an Beispielen orientiert, Themen prozessorientiert behandelt und vor allem algorithmische Aspekte beachtet, werden an der Universität fertige Theorien gelehrt, welche in abstrakter Sprache formuliert sind. Beweise haben eine zentrale Bedeutung: Sie müssen in der Vorlesung nachvollzogen und in den Übungsaufgaben selbst geführt werden. Diese Übungsaufgaben sind anders als Hausaufgaben nicht in wenigen Schritten lösbar, sondern brauchen zum Teil mehrere Ansätze, viele Knoten im Hirn und viel mehr Zeit bis man endlich eine richtige Lösung hat.[1]

Das kann im ersten Semester alles erstmal einschüchternd wirken, sollte es aber nicht. In unserem Versuch, den Einstieg ins Studium ein bisschen zu erleichtern haben wir Folgendes vor:

(i) Einige mathematische Grundlagen, sowie Grundbegriffe und Notationen einzuführen;

(ii) Best-Practice-Tipps zum Studium zu geben, u.a. zu Themen wie "Wie lese ich mathematische Texte?" oder "Wie gehe ich an eine Übungsaufgabe heran?";

(iii) Euch darin zu bestärken, dass ihr ein wirklich interessantes Studienfach gewählt habt und euch für das erste Semester zu motivieren.

Dieser Kurs ist nicht wie eine klassische Vorlesung in der Mathematik aufgebaut, welche in der Regel (oder zumindest im Grundstudium) einen in sich geschlossenen Teil einer Theorie nach und nach aufbaut. Stattdessen arbeiten wir hier sehr exemplarisch und zwischen mathematischen Definitionen und Sätzen tauchen zusätzliche informale Erläuterungen, z.B. zu bestimmten Schreib- und Sprechweisen oder mathematischen Konventionen sowie methodische Tipps fürs Mathematikstudium auf.

Die Tipps sind dabei wirklich nur als solche zu verstehen. Hier wird nicht behauptet, ein allgemeingültiges Rezept dafür geben zu können, wie man Mathematik richtig versteht oder wie man erfolgreich durchs Studium kommt. Sowas gibt es gar nicht. Die Tipps, z.B. zum Verstehen von Definitionen und Sätzen, können anfangs etwas komisch wirken, weil wir mit sehr einfachen Beispielen beginnen. Wir wollen diese aber nach und nach auch auf die neu eingeführten Konzepte anwenden und euch dazu animieren, euch auch beim Nachbereiten der Vorlesungen oder Bearbeiten der Übungsaufgaben in den ersten Semestern daran zu orientieren.

Dieser Kurs baut auf den von Sven Jarohs konzipierten Vorkurs für Mathematiker:innen, siehe [**Ja13**], auf und orientiert sich an der "Einführung in das mathematische Arbeiten" von Hermann Schichl und Roland Steinbauer [**SS09**] und dem Vorlesungsskript "Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten (EmDA)" von Kerstin Hesse [**He17**]. Ein großer Dank gebührt Markus Rennig und Leonie Scherer fürs Korrekturlesen dieses Skripts. Alle Fehler, die darüber hinaus geblieben sind, sind alleine die Schuld der Autorin und dürfen ihr gerne per Mail (kumpitsch@math.uni-frankfurt.de) mitgeteilt werden.

[1] Dafür ist es aber auch wirklich ein sehr gutes Gefühl, wenn man diese Lösung gefunden hat!

1 Ein Einstieg in die Mathematik

Studium

Jeder lernt anders. Das gilt natürlich auch im Mathematikstudium. Basierend auf eigenen Lern- und Lehrerfahrungen möchten wir euch trotzdem folgende Tipps mitgeben:

- In der Vorlesung wird der Stoff sehr schnell behandelt. Ihr werden nur Spaß und Erfolg im Studium haben, wenn ihr jede Vorlesung vor- und/oder nachbereitet.
- Stellt in der Vorlesung und in den Tutorien Fragen! Es gibt wirklich keinen Grund, Angst davor zu haben, Fragen zu stellen: Dozent:innen haben sie alle schon gehört. Niemand wird euch dafür für dumm halten, eigentlich gibt es auch keine dummen Fragen und mit großer Wahrscheinlichkeit haben viele andere die gleiche Frage wie ihr und profitieren sogar davon, dass ihr euch traut, sie zu stellen.
- Bearbeitet die Übungsaufgaben. Auch dann noch, wenn ihr die nötige Punktzahl für die Klausurzulassung oder den Leistungsnachweis erreicht habt. Gebt euch Mühe, die Aufgaben vollständig und ordentlich aufzuschreiben und nehmt das Feedback an, das ihr durch die Korrektur eurer Tutor:innen bekommt. Wenn euch die Korrektur nicht ausführlich genug ist oder ihr diese nicht nachvollziehen könnt, fragt nach und lasst euch erklären, was ihr noch verbessern könnt.
- Macht euch einen Zeitplan. Jede Woche müsst ihr Übungsaufgaben zu mindestens zwei Vorlesungen abgeben, Vorlesungen besuchen und vor- und nacharbeiten, manchmal kommen Seminarvorträge und gegen Ende des Semester Klausurvorbereitung dazu. Das erfordert viel Zeit und viel mehr Eigenverantwortung als man es aus der Schule gewohnt ist. Behaltet den Überblick, sonst werdet ihr schnell abgehängt. Es kann deshalb helfen, einen Wochenplan mit Vorlesungs- und Übungszeiten, sowie festen Zeiten zur Vor- und Nachbereitung von Vorlesungen, Lösen von Übungsaufgaben und Treffen mit der Lerngruppe, zu erstellen (und sich auch wirklich daran zu halten).
- Redet mit anderen über Mathematik. Sucht euch eine Lerngruppe, um gemeinsam an Übungsaufgaben zu arbeiten oder euch über die Vorlesungsinhalte auszutauschen. Viele Probleme klären sich schon, wenn man versucht, sie anderen zu erklären. Zusammen an Übungsaufgaben verzweifeln macht mehr Spaß als alleine. Es gibt immer wieder Dinge, die man mit sich selbst ausdiskutieren muss, aber insgesamt lebt Mathematik vom Austausch mit anderen.
- Zu den meisten Aufgaben zu den Vorlesungen aus dem Grundstudium findet man Lösungen im Internet oder Lehrbüchern. Auch wenn es lange dauert: Versucht eigenständig[a] auf die Lösung zu kommen. Eine Lösung nachzuvollziehen ist nicht das gleiche wie selbst auf eine Lösung zu kommen. Mathematik wird aber vor allem übers Selbstmachen gelernt. Das bedeutet aber nicht, dass ihr alles ohne Hilfe schaffen müsst: Genau deshalb gibt es z.B. das Lernzentrum Mathematik an der Goethe Uni.

Im Mathematikstudium und auch überall sonst, und ganz besonders während einer Pandemie, empfehlen wir außerdem ganz ausdrücklich: Gebt Acht auf euch und fragt nach Hilfe, wenn ihr sie braucht.

[a] Und das muss nicht alleine bedeuten!

1.1 Was ist Mathematik?

Wir beginnen mit einem weiteren Titel, dem wir nicht gerecht werden können. Eine konsensfähige Definition, was Mathematik eigentlich ist, oder zumindest was Mathematiker:innen machen, können wir nicht liefern. Man könnte sagen. Mathematik:innen studieren abstrakte Strukturen, versuchen darin Muster zu erkennen und arbeiten dabei weitgehend logisch-deduktiv. Statt über das Wesen der Mathematik zu sinnieren, hier eine (naive) Annäherung aus einer Praxisperspektive, die uns für den Anfang genügen soll:

> Mathematik ist ein Gedankengebäude bestehend aus
>
> **Aussagen/Sätzen**,
>
> welche ausgehend von gewissen Grundannahmen, genannt
>
> **Axiome**,
>
> gefolgert werden. Den Prozess des logischen Schlussfolgerns nennen wir auch
>
> **Beweisen**.

Aus verschiedenen Gründen beginnen wir an dieser Stelle nicht damit, auf welche Grundannahmen sich die Mathematik genau stützt. Der Mathematiker Kronecker hat angeblich mal das Folgende gesagt:

> *Die natürlichen Zahlen hat uns der liebe Gott gegeben, die ganze übrige Mathematik ist Menschenwerk.*

Wir wollen uns diesem Standpunkt anschließen und die natürlichen Zahlen als gegeben betrachten. Wir müssen dafür nicht mal an Gott glauben, weil sie wirklich sehr "natürlich" sind. Den Vorgang des Zählens kann man gewissermaßen als Ursprung der Mathematik betrachten und mit natürlichen Zahlen umgehen können wir alle schon seit der Grundschule.

Der Standpunkt Kroneckers wird von der mathematischen Grundlagenforschung nicht mehr vertreten, die den Ausgangspunkt der Mathematik z.B. bei gewissen einfachen logischen Verknüpfungen sucht. Für andere Bereiche der Mathematik ist dies aber selten relevant und wenn neue Behauptungen aufgestellt und bewiesen werden, so müssen wir diese nicht immer wieder auf das Fundament zurückführen. Das ist praktibel und macht das mathematische Gedankengebäude nicht weniger robust.

Für diesen Vorkurs setzen wir sogar noch ein bisschen mehr als nur die natürlichen Zahlen voraus, nämlich nehmen wir an, ihr seid alle mit den folgenden Konzepten vertraut:

Natürliche Zahlen	$\mathbb{N}$	$1, 2, 3, \ldots$
	$\mathbb{N}_0$	$0, 1, 2, 3, \ldots$
Ganze Zahlen	$\mathbb{Z}$	$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$
Rationale Zahlen	$\mathbb{Q}$	Brüche ganzer Zahlen (Nenner ungleich 0)
Reelle Zahlen	$\mathbb{R}$	"alle Dezimalzahlen" bzw.
		"alle Zahlen auf dem Zahlenstrahl"
Euklidische Ebene	$\mathbb{R}^2$	"Punkte im 2-dimensionalen Koordinatensystem "

Man bemerke, dass es unterschiedliche Konventionen dazu gibt, ob man die Null als natürlichen Zahl betrachtet. Bei uns bezeichnet $\mathbb{N}$ die positiven ganzen Zahlen, d.h. solche echt größer 0. Wir werden hier immer $\mathbb{N}_0$ schreiben, wenn wir die Null einschließen wollen.

1.2 Definitionen und Sätze

Um einfacher bzw. besser über das "mathematische Gebäude" sprechen zu können, geben wir z.B. neu konstruierten Objekten oder Eigenschaften eigene Namen. In unserer bisherigen Charakterisierung von Mathematik fehlt also noch etwas Entscheidendes, nämlich Definitionen.

Definitionen sind terminologische Vereinbarungen und legen (eindeutig!) fest, was unter einem bestimmten mathematischen Begriff zu verstehen ist. Sie dienen also zur Vergabe von Namen oder Abkürzungen. Sie sind weder richtig noch falsch, können aber mehr oder weniger sinnvoll sein und dürfen nicht mehrdeutig sein.

Wir wollen hierzu Beispiele betrachten.

Definition 1.1 (Teiler, gerade Zahl). Sei $n \in \mathbb{Z}$.

(i) Wir nennen eine ganze Zahl m einen *Teiler* von n, wenn eine ganze Zahl k existiert, sodass $n = m \cdot k$. In diesem Fall schreiben wir auch $m \mid n$.

(ii) Wir nennen n eine *gerade Zahl*, wenn 2 ein Teiler von n ist.

Definitionen lesen

Um eine neue Definition richtig zu verstehen bzw. zu verinnerlichen, können die folgenden Fragen helfen:

(i) Verstehe ich alle in der Definition vorkommenden Zeichen und Begriffe?

(ii) Kann ich die Definition in eigenen Worten/einfacher(er) Sprache wiedergeben?

(iii) Kann ich Beispiele und Gegenbeispiele zu der Definition finden?

(iv) Warum ist diese Definition sinnvoll bzw. eindeutig?[a]

(v) Wie prüfe ich nach, ob ein gegebenes Objekt die beschriebene Eigenschaft besitzt?

(vi) Habe ich eine Vorstellung zu dem definierten Begriff/ Was assoziiere ich mit diesem Begriff?[b]

[a] Das ist an diesem Punkt absichtlich unpräzise ausgedrückt und die Frage wird erst durch spätere Beispiele gehaltvoll. Eine präzisere Formulierung, die tautologisch klingt: Man sollte sich immer überlegen, warum die Definition *wohldefiniert* ist.

[b] Nicht immer kann man einen Begriff visualisieren. Hier kann z.B. auch gemeint sein: ein generisches (Gegen-)Beispiel oder wichtige Eigenschaften der definierten Objekte.

Das Symbol $\in$ nennt man auch das **Elementzeichen**. Zu lesen ist es als "ist Element von". Allgemeiner bezieht es sich auf das Enthaltensein eines Objekts in einer **Menge**. Das ist eine "Zusammenfassung von bestimmten (unterscheidbaren) Objekten unserer Anschauung/unseres Denkens (genannt **Elemente**) zu einem Ganzen." Den allgemeinen Mengenbegriff betrachten wir ab Abschnitt 4, solange genügen uns die Beispiel $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$.

Konkret lesen wir das Elementzeichen z.B. als

Formal	In Worten
Sei $n \in \mathbb{Z}$	Sei n eine ganze Zahl,
Sei $P \in \mathbb{R}^2$	Sei P ein Punkt im $\mathbb{R}^2$.

Wir benutzen das Symbol $\notin$ um auszudrücken, dass ein Objekt nicht in einer Menge enthalten ist und lesen es als "ist kein Element von". Beispielsweise ist -2 keine natürliche Zahl und wir schreiben $-2 \notin \mathbb{N}$.

Den obigen Tipp wollen wir nun für die Definition einer geraden Zahl durchgehen. Zum Beispiel könnte man sich Folgendes überlegen:

(i) In der Definition kommt am Anfang der Ausdruck $n \in \mathbb{Z}$ vor, der zuvor nicht bekannt war.

(ii) In einfachen Worten: Eine ganze Zahl ist gerade, wenn sie als 2 mal eine andere ganze Zahl geschrieben werden kann.

(iii) Beispiele: $0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots$, Gegenbeispiele: $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \ldots$

(iv) Ja, eine ganze Zahl ist entweder gerade oder nicht.

(v) Allgemeiner zur Teilbarkeit durch m: Führe eine Division mit Rest durch, Speziell für Teilbarkeit durch Zwei: Die letzte Ziffer ist 0,2,4,6 oder 8.

(vi) Beispielsweise sowas wie: Jede zweite ganze Zahl ist gerade.

Aufgabe 1.2. Ergänze die folgende Definition:

Eine ganze Zahl n heißt *ungerade*, wenn ______________________________

Hier sind weitere Beispiele von Definitionen, die weitgehend bekannt sein sollten:

Definition 1.3 (Primzahl)**.** Eine *Primzahl* ist eine natürliche Zahl p, die größer als 1 ist und nur die trivialen Teiler besitzt, d.h. deren einzige Teiler ± 1 und $\pm p$ sind.

Definition 1.4 (Größter gemeinsamer Teiler)**.** Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $a, b \neq 0$. Der *größte gemeinsame Teiler* von a und b ist die größte natürliche Zahl d mit $d \mid a$ und $d \mid b$. In diesem Fall schreiben wir $d =: \mathrm{ggT}(a, b)$.

Definition 1.5 (Teilerfremdheit)**.** Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $a, b \neq 0$. Wir nennen a und b *teilerfremd*, wenn $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$.

Definition 1.6. Der *(Euklidische) Abstand* zweier Punkte $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$\|P_1 - P_2\| := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Mit dem Symbol $:=$ (bzw. $=:$) legen wir eine neue Notation/einen neuen Namen für einen Ausdruck/ein Objekt fest. Auf welcher Seite man den Doppelpunkt setzt ist abhängig davon, auf welcher Seite der Gleichung die neue Notation steht.

Definition 1.7. Unter einem *(Euklidischen) Dreieck* verstehen wir ein Tripel von Punkten (A, B, C) in $\mathbb{R}^2$, die nicht auf einer Geraden liegen.

Aufgabe 1.8. Wende den obigen Tipp an, um die obigen Definitionen zu verstehen.

Jetzt wollen wir ein paar **Aussagen** machen über die zuvor definierten Objekte.

Eine **Aussage** ist für uns ein "sprachliches Gebilde", das entweder *wahr* oder *falsch* ist– nicht beides gleichzeitig. Ist A eine Aussage, die wahr (bzw. falsch) ist, so sagen wir im Folgenden auch es gilt A (bzw. es gilt nicht A).

Beispiel 1.9. (i) "2 ist eine gerade Zahl." ist eine (wahre) Aussage.

(ii) "2 ist eine ungerade Zahl." ist eine (falsche) Aussage.

(iii) "Diese Aussage ist nicht wahr." ist keine Aussage, da sie weder wahr noch falsch ist.

Eine Aussage, deren Gültigkeit bereits bewiesen ist, nennt man in der Mathematik einen **Satz**. Ansonsten spricht man von einer **Behauptung** oder, wenn man gute Gründe hat an die Gültigkeit zu glauben, einer **Vermutung**. Anstelle von Satz werden zum Teil andere Ausdrücke verwendet, die die (relative) Wichtigkeit der Aussagen (untereinander) kennzeichnen. Es gibt keine einheitliche Konvention. Folgende Übersicht halten wir aber für relativ konsensfähig:

Hauptsatz, Fundamentalsatz, Theorem: Bezeichnet einen besonders wichtigen Satz aus einem Teilgebiet der Mathematik, z.B. der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. (Vorsicht: In englischsprachiger Literatur wird *theorem* eher gleichbedeutend mit Satz benutzt)

Satz, Proposition: Dies ist das typische Resultat einer Theorie. Die Aussage hat eine eigenständige Relevanz (anders als z.B. ein Lemma), ist aber nicht so zentral wie ein Hauptsatz. Poposition ist die lateinische Bezeichnung für Aussagen. In vielen Fällen wird damit ein Resultat bezeichnet, dessen Wichtigkeit geringer ist als die eines Satzes.

Lemma: Bezeichnet ein kleines, meist technisches Resultat und/oder einen Hilfssatz, der im Rahmen des Beweises eines wichtigen Satzes verwendet wird, selbst aber eine untergeordnete Bedeutung hat. Kann aber auch einen besonders wichtigen Schlüsselgedanken bezeichnen, der nicht nur an einer Stelle in einer Theorie, sondern in verschiedenen Situationen nützlich ist.

Korollar: Dies ist ein Satz, der aus einem anderen Satz einfach gefolgert werden kann. Oft handelt es sich um einen Spezialfall.

Jetzt wollen wir endlich ein Beispiel einer mathematischen Aussage betrachtet.

Satz 1.10. *Das Quadrat einer geraden Zahl ist gerade.*

Dies wollen wir jetzt auch beweisen. Aber was bedeutet das? Eine sehr vage Antwort:

Ein **Beweis** einer mathematischen Aussage ist eine Kette logischer Argumente, die die Gültigkeit der Aussage begründet.

Und jetzt zurück zu unserem ersten Beispiel. Wir geben einen ausführlichen Beweis der Behauptung, in welchem wir jede Folgerung und jeden Umformungsschritt begründen. Das wird in einem Vorlesungsskript, Lehrbuch oder einem Fachartikel normalerweise nicht gemacht.

Beweis. Es ist also für eine ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ zu zeigen:

Angenommen n ist eine gerade Zahl.
Dann ist n^2 gerade.

Sei $n \in \mathbb{Z}$ eine gerade Zahl.

$$\underset{\text{Per Def.}}{\longrightarrow} \text{Dann gibt es ein } k \in \mathbb{Z}, \text{ sodass } n = 2 \cdot k.$$

Wir nutzen diese Darstellung nun in der Berechnung des Quadrats von n:

$$\underset{\text{Einsetzen}}{\longrightarrow} n^2 = (2k)^2 \underset{\text{Potenzregeln}}{=} 4 \cdot k^2 \underset{\text{ausklammern}}{=} 2 \cdot (2k^2).$$

Bemerke, dass $m := 2k^2$ eine ganze Zahl ist, weil Produkte von ganzen Zahlen ganze Zahlen sind. Damit ist $n^2 = 2 \cdot m$ eine gerade Zahl. □

Bemerkung 1.11. Der eben gesehene Beweis ist ein Beispiel eines **direkten Beweises**.

Die meisten mathematischen Aussagen sind von der Form

Wenn A gilt, dann gilt B,

wobei A und B Aussagen sind. Dabei ist A die Annahme und B die Konklusion. Wir nennen dies eine **Implikation** und notieren dies auch als

$$A \Rightarrow B.$$

Sätze verstehen

Um einen neuen Satz richtig zu verstehen bzw. zu verinnerlichen, können die folgenden Fragen helfen:

(i) Verstehe ich alle vorkommenden Zeichen und Begriffe?

(ii) Um was geht es im Satz? Genauer: Über welche Art von mathematischen Objekte wird hier welche Art von Aussage gemacht?

(iii) Was sind die Voraussetzungen in diesem Satz? Was wird behauptet? Kann ich den Satz in (Teilbehauptungen der) Form $A \Rightarrow B$ schreiben?

(iv) Verstehe ich die Definitionen aller vorkommenden mathematischen Begriffe? Wurden ggf. schon andere Charakterisierungen davon in der Vorlesung bewiesen?

(v) Kann ich ein Beispiel angeben, das die Voraussetzungen erfüllt? Warum erfüllt es die Behauptung?

(vi) Kann ich (jeweils) ein (Gegen-)Beispiel angeben, das eine der Voraussetzungen nicht erfüllt? Ist die Behauptung dann erfüllt?

(vii) Mit Blick auf den Beweis: Wozu brauche ich welche Voraussetzung bzw. an welcher Stelle wird welche Voraussetzung verwendet?

(viii) Kann ich den Satz irgendwie visualisieren?

(ix) Was ist das schöne/gute/praktische/hilfreiche an diesem Satz?

Diese Fragen lassen sich genau so auf Übungsaufgaben anwenden.

Und nochmal für Leute in der letzten Reihe:

Beispiele sind wichtig.

Nur so kann man eine Intuition für neue Begriffe und ihre Zusammenhänge gewinnen. Formale Definitionen sind natürlich auch wichtig. In Beweisen müssen wir mit diesen abstrakt argumentieren. Sehr schnell werdet ihr aber Sätze oder Übungsaufgaben vor euch haben, wo ein reines "Einsetzen der Definitionen" nicht mehr ausreicht, sondern man an irgendeinem Punkt eine echte *Idee* braucht. Die kann man oft (nicht immer) durch Betrachtung von Beispielen und Gegenbeispielen bekommen. Gleichzeitig gilt aber:

Ein Beispiel ist im Allgemeinen kein Beweis.

Auch hier gibt es Ausnahmen. Dazu später mehr.

Aufgabe 1.12. Beweise die Aussage: Die Summe zweier gerader Zahlen ist gerade.

Direkte Beweise sind nicht immer so einfach bzw. so direkt wie bisher gesehen. Dazu:

Satz 1.13. *Sei $n \in \mathbb{Z}$. Ist n^2 eine gerade Zahl, so ist auch n gerade.*

Wieso ist hier ein direkter Beweis schwieriger? Schreiben wir die Voaussetzung aus, wissen wir, dass es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $n^2 = 2k$. Zu zeigen ist, dass $k' \in \mathbb{Z}$ existiert mit $n = 2k'$. Leider kommen wir von der Darstellung von n^2 dieser Art nicht so leicht zu einer Darstellung von n. Wurzelziehen z.B. bringt uns (zumindest formal) hier nicht weiter. Aber vielleicht bringt uns die Überlegung (oder alternativ auch die Betrachtung von (Gegen-)Beispielen) auf die richtige Idee: Der Faktor 2 kann nicht durch Quadrieren "neu" entstehen. Um diese Idee richtig zu formulieren brauchen wir folgendes Hilfsresultat (erstmal ohne Beweis):

Lemma 1.14 (Existenz und Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $n > 1$. Dann gibt es paarweise verschiedene Primzahlen $p_1, \ldots, p_k$, und natürliche Zahlen $e_1, \ldots, e_k \geq 1$ sodass*

$$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}.$$

Diese Darstellung ist eindeutig bis auf Reihenfolge der Primzahlen $p_1, \ldots, p_k$.

Aufgabe 1.15. (i) Benutze die Tipps zum Lesen von Sätzen um Lemma 1.14 zu verstehen.

(ii) Bemerke, dass es für $n = 1$ keine Primteiler gibt. Man könnte 1 jedoch als Produkt über die leere Menge (siehe Abschnitte 1.3 und 4) darstellen.

(iii) Dieses Lemma ist für natürliche Zahlen formuliert. Welche Aussage liefert es mir für ein ganzzahliges $n \in \mathbb{Z}$? Bemerke, dass du hier zusätzlich fordern solltest, dass $n \neq 0, \pm 1$.

Damit geben wir einen ersten direkten Beweis von Satz 1.13.

Beweis von Satz 1.13 (Version 1). Sei $n \in \mathbb{Z}$. Da für $n = 0$ die Aussage klar ist und n^2 für $n = \pm 1$ keine gerade Zahl ist, können wir hier annehmen, dass $n \neq 0, \pm 1$ gilt. Dann besitzt n eine (bis auf Reihenfolge eindeutige) Primfaktorzerlegung. Das heißt es gibt paarweise verschiedene Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_k$, und natürliche Zahlen $e_1, e_2, \ldots, e_k \geq 1$ sodass

$$n = (\pm 1) \cdot p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}.$$

Damit ist auch die Primfaktorzerlegung von n^2 auch schon festgelegt. Nämlich gilt:

$$n^2 = (p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k})^2 = p_1^{2e_1} \cdot p_2^{2e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{2e_k}.$$

Wir nehmen an, dass n^2 gerade ist. Es gibt also einen Index i mit $p_i = 2$. Wir können ohne Einschränkung sagen, dass $i = 1$ gilt. Dann kommt 2 aber auch in der Primfaktorzerlegung von n vor, genauer haben wir

$$n = (\pm 1) \cdot 2^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k} = 2 \cdot ((\pm 1) \cdot 2^{e_1 - 1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}).$$

Damit folgt aber schon, dass n gerade ist, was zu zeigen war. □

Bemerkung 1.16. Da wir hier Produkte von unbestimmter Anzahl von Primzahlen betrachten, können wir nicht jeden Faktor ausschreiben. Deshalb benuzten wir hier "..." um zu signalisieren, dass wir hier alle Primzahlen p_i aus der Liste miteinander multiplizieren. Formal kann man das auch mithilfe eines **Produktzeichens** schreiben. Siehe dazu Abschnitt 1.3.

Mathematik hat viele sprachliche Eigenheiten und eine klare Notation ist fast so wichtig wie der Inhalt. Einiges haben wir schon beobachten können. Hier ein paar Aspekte zusammengefasst:

- **Benennung der Objekte:** Wir reden in der Mathematik selten über bestimmte mathematische Objekte (z.B. konkrete ganze Zahlen), sondern diskutieren Eigenschaften von allgemeinen Objekten und legen deshalb Namen für einen Platzhalter fest. Zum einen ist es wichtig, diese Platzhalter vor der Benutzung immer einzuführen (z.B. "Sei n eine ganze Zahl"). Man kann von den Leser:innen nicht erwarten, dass sie selbst herausfinden, was eine solche Bezeichnung bedeutet. Solange man das tut und diese Bezeichnung konsistent weiter verwendet, könnte man die verwendeten Objekte im Grunde nennen wie man will. Um die Lesbarkeit eines Textes zu verbessern, sollte man sich dafür, welche Buchstaben (dazu gehört: welches Alphabet, Groß- oder Kleinschreibung) man für welche Arten von Objekten benutzt, an gewisse Konventionen halten. Zum Beispiel benutzt man für natürliche/ganze Zahlen oft die Buchstaben n, m, k, speziell für Primzahlen p, für eine reelle Zahl z.B. den Buchstaben x, griechische Buchstaben α, β, γ, usw. für Winkel und für Matrizen, Mengen und Aussagen Großbuchstaben wie A, B, C. Solche Konventionen sind in der Literatur (leider) nicht einheitlich und haben sich über die Jahre immer wieder verändert. Ein Gefühl dafür wie man "richtige " Notation wählt bekommt man erst durch viel Erfahrung im Lesen und Verfassen mathematischer Texte. Solange sollte man sich an den Notationen in der Vorlesung orientieren. Diese ist in der Regel gut durchdacht.

- **Indizes:** Ein Index ist ein Unterscheidungszeichen, das in der Regel unten an ein Zeichen angeheftet wird, so z.B. die in Lemma 1.14 auftauchenden verschiedenen Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Indizes dienen also dazu, verschiedene (oft verwandte) Objekte weitgehend einheitlich zu bezeichnen. Die Indizes, die man dazu benutzt, fasst man auch zusammen zu einer **Indexmenge** I. Meistens benutzt man hierzu natürliche Zahlen. Bei den damit indizierten Objekten a_i spricht man manchmal auch von einer **Familie** von Objekten $(a_i)_{i \in I}$. Dieses Konzept wird vor allem bei der Definition von Summen und Produkten wichtig.

- **...:** Bei einer Aufzählung von (unbestimmt) vielen Objekten benutzt man häufig auch die "Pünktchenschreibweise". Beachte, dass die Objekte sinnvoll benannt/indiziert und hinreichend viele angegeben werden müssen, damit klar ist, wie die Objekte aussehen, welche man in der Auflistung weglässt. Bei Summen oder Produkten kann man alternativ das Summen- bzw. Produktsymbol nutzen (siehe Abschnitt 1.3). Es gilt aber immer: Formale Schreibweise sollte die Lesbarkeit eines Textes nicht verschlechtern.

- **Das Ende eines Beweises:** In der mathematischen Literatur ist es üblich, das Ende eines Beweises zu kennzeichnen. Historisch gesehen schrieb man *Q.E.D.* (oder *q.e.d.* bzw. qed), was die Abkürzung der lateinischen Phrase *quod erat demonstrandum* (auf deutsch *was zu zeigen war*) ist. Heute wird das Ende eines Beweises von den meisten mit einem Quadrat, wie z.B. $\square$ oder $\blacksquare$ gekennzeichnet.

- **"Ohne Einschränkung":** Diese Phrase (oder auch "Ohne Beschränkung der Allgemeinheit", kurz *oBdA*) benutzt man, wenn man eine Zusatzannahme macht, durch die (und das ist entscheidend) ich mich nicht inhaltlich auf einen Spezialfall reduziere, sondern nur das Aufschreiben meines Argumentes einfacher/kürzer macht.

Beweise lesen

Beweise werden in einem Vorlesungs-Skript oder in Lehrbüchern (und schon gar nicht in Fachartikeln) nicht so ausführlich auskommentiert wie wir es z.B. im Beweis von Satz 1.10 getan haben. Ausgelassen werden bzw. unkommentiert bleiben z.B. einfache Rechnungen oder Umformungen. Manchmal wird nicht nochmal explizit gesagt, welche Voraussetzungen benutzt werden. Der wichtigste Tipp beim Lesen von Beweisen ist deshalb: Immer mit Stift in der Hand lesen. Bestenfalls benutzt ihr diesen Stift (oder ein digitales Pendant davon) dann auch, um euch:

(i) zu notieren, welche Art von Beweis geführt wird;[a]

(ii) die argumentative Struktur des Beweises zu kennzeichnen, d.h. wo wird welche (Formulierung einer) Definition oder ein (Hilfs-)Satz genutzt;

(iii) die "Kernidee" hervorzuheben;

(iv) die Details aufzuschreiben, die im Text ausgelassen sind, z.B. warum gilt eine bestimmte Gleichheit oder Umformung.

Ihr werdet in euren Vorlesungsskripten oder in Lehrbüchern auch ganz oft in Beweisen Formulierungen finden wie "Der Rest ist klar", "Die Behauptung ist offensichtlich" oder "Das ist trivial" . Idealerweise sollte dies nur an Stelle stehen, wo die (Rest-)Behauptung unmittelbar aus dem schon Gesagten, einem anderen Satz oder einer Definition folgt, d.h. bspw. nur einfache Umformulierungen, Umformungen oder Einschränkungen auf einen Spezialfall nötig sind bis die Behauptung da steht. Manchmal steckt hinter der Verwendung dieser Begriffe leider auch Faulheit. In jedem Fall: Solche Formulierungen immer mit Misstrauen lesen und sich selbst klar machen, ob bzw. warum diese Behauptung klar ist. Und am allerbesten: Das Wort "trivial" gar nicht erst benutzen.

[a] An diesem Punkt kennen wir nur *direkte Beweise*. Später lernen wir noch *indirekte Beweise* bzw. *Widerspruchsbeweise* kennen. Ein anderes Beweispinzip, das wir in Abschnitt 3 kennenlernen, ist die *vollständige Induktion*.

1.3 Summen und Produkte

Da wir in der Mathematik Summen und Produkte von beliebig vielen Objekten, teils auch nur "rein formal", betrachten wollen, führen wir an dieser Stelle kurz die entsprechenden Notationen ein. Wir gehen dabei weiterhin davon aus, dass wir gewisse Konzepte, nämlich natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen, schon kennen und wissen, was mit Summen und Produkten davon gemeint ist.

Das **Summenzeichen** Σ dient zur vereinfachten Darstellung von Summen. Das Zeichen selbst ist der griechischer Großbuchstabe *Sigma*. Um eine sinnvolle Summennotation zu bestimmen, brauchen wir noch eine **Indexmenge**, über die wir summieren. Üblicherweise ist $I = \{1, \dots, n\}$ für eine natürliche n.

Sei I nun eine endliche Indexmenge und für alle $i \in I$ sei a_i eine reelle Zahl. Die Summe über alle a_i mit $i \in I$ notieren wir als

$$\sum_{i \in I} a_i,$$

wobei i auch als **Summations- oder Laufindex** bezeichnet wird und a_i als **Summand**. Die Anzahl der Summanden entspricht genau der Anzahl der Elemente in der Indexmenge.

Speziell für $I = \{1, \dots, n\}$ schreiben wir auch

$$\sum_{i \in I} a_i =: \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

und nennen das die Summe über a_i von $i = 1$ bis n.

Aus formalen Gründen muss man an dieser Stelle noch definieren: Ist $I = \emptyset$ die **leere Indexmenge**, so setzen wir $\sum_{i \in I} a_i := 0$, auch **leere Summe** genannt. Das intuitive Verständnis hierfür ist, dass man eine leere Summe zu einer bestehenden Summe anfügen können sollte, ohne dass sich etwas ändert. Dazu muss die leere Summe das neutrale Element der Addition sein, also die Null.

Das Konzept lässt sich verallgemeinern:

- Auch unendliche Indexmengen wie $I = \mathbb{N}$ können sinnvolle Ausdrücke liefern. Das werdet ihr in der Analysis 1 als **unendliche Reihen** studieren.
- Summen lassen sich für allgemeinere Arten von mathematischen Objekten definieren. Dafür muss man auf diesen Objekten natürlich auch erstmal eine Addition definieren. Das passiert zunächst für je zwei Objekte. Die Summe über endliche Indexmengen definiert man dann rekursiv, d.h. wenn man die Summe dreier Objekte definieren will, dann berechnet man zuerst die Summe zweier Objekte und addiert dann dieses Ergebnis mit dem dritten Objekt, usw. Damit das geht muss die Addition außerdem *assoziativ* und *kommutativ* sein.[2]

[2] Ganz formal und mit Zeichen und Begriffen, die wir noch nicht verstehen: Sei I eine endliche Indexmenge, A ein kommutatives Monoid. Für jedes $i \in I$ sei ein $a_i \in A$ gegeben. Man setzt $\sum_{i \in \emptyset} a_i := 0 \in A$ und ansonsten $\sum_{i \in I} a_i := a_j + \sum_{i \in I \setminus \{j\}} a_i \in A$ nach Wahl eines beliebigen Elementes $j \in I$. Dies ist wegen der Kommutativität und Assoziativität der Addition in A wohldefiniert.

Beispiel 1.17. (i) Die Summe der ganzen Zahlen von 1 bis 5 notieren wir folgendermaßen:

$$\sum_{i=1}^{5} i = 1+2+3+4+5.$$

(ii) Summen über konstante a_i's können auch gebildet werden. Sei a eine reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$. Hier summieren wir die n-mal die Zahl a auf:

$$\sum_{i=1}^{n} a = a + \ldots + a = n \cdot a.$$

(iii) Wie erwähnt sind auch andere Indexmengen möglich, z.B.

$$\sum_{i \in \{2,3,5,7\}} \frac{1}{i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}.$$

(iv) Summen tauchen auch in der Definition eines Polynoms auf. Wir geben hier eine erste (bewusst etwas unpräzise) Definition. Sei $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$.

Definition 1.18. Ein *Polynom in einer Variablen X mit Koeffizienten in R* ist eine formale Summe der Form

$$P = P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i,$$

wobei $a_i \in R$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Bemerkung 1.19 (Indexverschiebung)**.** Mit **Indexverschiebung** bezeichnet man bei Summen (oder Reihen) das Ersetzen des Summationsindex durch Addition einer ganzen Zahl, ohne dass sich der Wert der Summe verändert. Der Sinn einer solchen Indexverschiebung ist zumeist, die weitere Rechnung zu vereinfachen. Betrachte zum Beispiel

$$\sum_{i=1}^{4} (i+4) = (1+4) + (2+4) + (3+4) + (4+4).$$

Ersetzt man $k = i + 4$, so verändern sich die Summationsgrenzen

Untere Grenze : $i = 1 \Leftrightarrow k = 5$
Obere Grenze: $i = 4 \Leftrightarrow k = 8$

und damit erhält man als neue Summendarstellung

$$\sum_{i=1}^{4} (i+4) = \sum_{k=5}^{8} k = 5+6+7+8.$$

Etwas allgemeiner formuliert stellen wir also für $n, m, k \in \mathbb{N}$ fest:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m+k}^{n+k} a_{i-k}.$$

Der Sinn dieses Vorgehens erschließt sich dadurch noch nicht. Beispiele dafür, warum eine Indexverschiebung hilfreich sein kann, werden euch aber bestimmt bald auf einem Analysis-Übungsblatt begegnen. An dieser Stelle können wir aber festhalten: Summendarstellungen sind nicht eindeutig.

Das **Produktzeichen** Π dient zur vereinfachten Darstellung von Produkten. Das Zeichen selbst ist der griechische Großbuchstabe *Pi*.

Sei I nun eine endliche Indexmenge und für alle $i \in I$ sei a_i eine reelle Zahl. Das Produkt über alle a_i mit $i \in I$ notieren wir als

$$\prod_{i \in I} a_i,$$

wobei i auch als **Produkt- oder Laufindex** bezeichnet wird und a_i als **Faktor**. Die Anzahl der Faktoren entspricht genau der Anzahl der Elemente in der Indexmenge.

Speziell für $I = \{1, \ldots, n\}$ schreiben wir auch

$$\prod_{i \in I} a_i =: \prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

und nennen dies das Produkt über a_i von $i = 1$ bis n.

Aus formalen Gründen muss man an dieser Stelle noch definieren: Ist $I = \emptyset$ die leere Indexmenge, so setzen wir $\prod_{i \in I} a_i := 1$. Das intuitive Verständnis ist, dass man ein leeres Produkt zu einem bestehenden Produkt anfügen können sollte ohne dass sich der Wert ändert. Dazu muss das leere Produkt das neutrale Element der Multiplikation sein, also die Eins.

Das Produkt ist auf ähnliche Weise wie die Summe verallgemeinerbar.

Beispiel 1.20. (i) Das Produkt der ganzen Zahlen von 1 bis 5 notieren wir folgendermaßen:

$$\prod_{i=1}^{5} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5.$$

So können wir die **Fakultät** einer natürlichen Zahl n definieren:

$$n! := \prod_{i=1}^{n} i$$

(ii) Produkte über konstante a_i's können auch gebildet werden. Sei a eine reelle Zahl und $n \in N$. Hier multiplizieren wir n -mal die Zahl a mit sich selbst:

$$\prod_{i=1}^{n} a = a \cdot \ldots \cdot a = a^n.$$

(iii) Es sind auch andere Indexmengen möglich, z.B.

$$\prod_{i \in \{2,3,5,7\}} \frac{1}{i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7}.$$

Bemerkung 1.21. Indexverschiebungen lassen sich in analoger Weise auf das Produkt anwenden. Es gilt also:

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = \prod_{i=m+k}^{n+k} a_{i-k}.$$

Aufgabe 1.22. (i) Schreibe die folgenden Ausdrücke ohne Summen- oder Produktzeichen (ohne die Werte zu berechnen):

(a) $\sum_{i\in\{2,3,5,7\}} i^2$;

(b) $\prod_{k=1}^{5} x^{k-1}$;

(c) $\sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} x^{3-k} y^k$, wobei $\binom{n}{k}$ den Binomialkoeffizienten[2] bezeichne;

(d) $\sum_{j=3}^{6} \prod_{k=1}^{3} (jk-2)$.

(ii) Schreibe die folgenden Ausdrücke in Summen- oder Produktnotation:

(a) $1+3+9+27+81+243+729+2187$;

(b) $1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13$;

(c) $a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}$.

Aufgabe 1.23. Gehe zurück zum Beweis von Satz 1.13 und schreibe alle Produkte mit Hilfe von Produktzeichen um.

[2]Der *Binomialkoeffizient* ist für natürliche Zahlen n,k mit $k<n$ definiert als als $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

2 Ein bisschen Logik und Beweisprinzipien

Zurück zum Inhalt: Bei Satz 1.13 konnten wir nach Anfangsproblemen unseren direkten Beweis noch führen. Dafür haben wir aber einen Hilfssatz gebraucht, der letztlich schwieriger zu beweisen ist als der Satz selbst. Bei bestimmten Arten von Aussagen sind direkte Beweise gar nicht oder nur sehr schwer möglich. Klassische Beispiele hierfür sind die folgenden:

Definition 2.1. Eine reelle Zahl x heißt *irrational*, wenn sie sich nicht als Bruch ganzer Zahlen (mit nicht verschwindendem Nenner) schreiben lässt.

Satz 2.2. *$\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl.*

Theorem 2.3 (Satz von Euklid)**.** *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Für diese Beispiel (und Satz 1.13) eignet es sich besser mit dem logischen Gegenteil der zu zeigenden Behauptung zu beginnen und daraus das logische Gegenteil der Annahme zu folgern bzw. eine Annahme zum Widerspruch zu führen. Was meinen wir mit "logischem Gegenteil" und warum darf man das so machen? Wir holen ein bisschen aus und beginnen, uns den logischen Grundlagen der Mathematik zuzuwenden.

Eine richtige Einführung in Logik kann und soll dieser Vorkurs nicht leisten. Viele Begriffe werden wir in diesem Kurs naiv einführen und benutzen. Wir werden uns nicht der subtilen Begriffsbildung widmen, die nötig wäre, um die Grundlagen richtig aufzubauen. Mit diesem naiven Verständnis kommt man in der Mathematik aber tatsächlich sehr weit und allen, die tiefer in die Grundlagen der Mathematik eintauchen wollen, empfehlen wir den Besuch einer Vorlesung in mathematischer Logik.

2.1 Ein Ausflug in die Aussagenlogik

In diesem Abschnitt geht es um Grundbegriffe und -konstruktionen der **klassischen Aussagenlogik**. Die beiden wichtigsten Prinzipien der klassischen Aussagenlogik sind die folgenden:

- **Zweiwertigkeit**: Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch und es müssen nur solche Situationen betrachtet werden und dies ist auch unabängig davon, ob man in der Lage ist tatsächlich nachzuprüfen, was davon der Fall ist. Insbesondere kann es also nicht sein, dass eine Aussage gleichzeitig wahr und falsch ist. Es kann auch nicht sein, dass eine Aussage weder wahr noch falsch ist Die Möglichkeiten “wahr” und “falsch” werden auch die möglichen Wahrheitswerte einer Aussage genannt.

- **Kompositionalität** und **Kontextfreiheit**: Setzen wir nun eine Aussagen aus verschiedenen Teilaussagen zusammen, so hängt der Wahrheitswert von dieser nur von den Wahrheitswerten der jeweiligen Teilaussagen, sowie der Art der Zusammensetzung ab.

Wir hatten schon eingeführt: Mit *Aussage* meinen wir ein sprachliches Gebilde, welches einen Sachverhalt beschreibt und eindeutig entweder wahr oder falsch ist. Wir wollen in diesem Abschnitt erklären, wie sich eine Aussagen aus verschiedenen “Teilaussagen” zusammensetzt. Um die Bedeutung von logischen Verknüpfungen festzulegen nuzten wir sogenannte **Wahrheitstafeln** und stützen uns dabei auf die oben genannten Prinzipien der klassischen Aussagenlogik. Wahrheitstafeln geben uns dann ferner eine Möglichkeit, die Gültigkeit von weiteren rein aussagenlogischen Behauptungen, die diese Verknüpfungen benutzen, zu beweisen.

Eine **Wahrheitstafel** ist eine tabellarische Aufstellung des Wahrheitswertverlaufs einer logischen Aussage. Sie stellt für alle möglichen Zuordnungen von Wahrheitswerten (bei uns: w = wahr oder f = falsch) zu den Teilaussagen dar, welchen Wahrheitswert die daraus zusammengesetzte Gesamtaussage unter der jeweiligen Zuordnung annimmt.

Eine Wahrheitstafel sieht also folgendermaßen aus:

A_1	A_2	...	A_n	Aus den A_i's zussamengesetzte Aussage
w	w	...	w	?
f	w	...	w	?
w	f	...	w	?
f	f	...	w	?
$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$
f	f	...	f	?

Für $n = 2$ Aussagen gibt es also 4 mögliche Zuordnungen von gemeinsamen Wahrheitszuständen. Diese haben wir in der Tabelle markiert.

Der einfachste Zusammenhang besteht zwischen einer Aussage A und ihrer Verneinung:

Definition 2.4 (Negation)**.** Es sei A eine Aussage, dann bezeichnen wir mit $\neg A$ die *negierte* Aussage A. Wir lesen $\neg A$ als "nicht A". Die Aussagen A und $\neg A$ stehen im Verhältnis:

A	$\neg A$
w	f
f	w

Beide Aussagen schließen sich gegenseitig aus, d.h. A und $\neg A$ niemals gleichzeitig wahr sind.

Beispiel 2.5. (i) Die Negation der wahren Aussage A : "Berlin ist die Hauptstadt Deutschlands." ist die falsche Aussage $\neg A$: "Berlin ist nicht die Hauptstadt Deutschlands."

(ii) Die Negation der falschen Aussage A : "$42 < 0$" ist die wahre Aussage $\neg A$: "$42 \geq 0$".

Im Laufe dieses Abschnittes werden wir noch sehen, wie kompliziertere Aussagen negiert werden.

Definition 2.6 (Konjunktion)**.** Die *Konjunktion* $(A \wedge B)$ zwischen zwei Aussagen A und B, gelesen als "A und B", ist gegeben durch die Wahrheitstafel:

A	B	$(A \wedge B)$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Beachte: Nur wenn A und B beide gleichzeitig gelten, d.h. beide sind wahr, gilt $(A \wedge B)$. Die Reihenfolge spielt keine Rolle. Wir sagen auch: Die logische Operation $\wedge$ ist kommutativ.

Beispiel 2.7. (i) Die Aussage ("Berlin ist die Hauptstadt Deutschlands." $\wedge$ "Dies ist ein Vorkurs.") ist wahr.

(ii) Die Aussage ("Berlin ist die Hauptstadt Deutschlands." $\wedge$ "Corona ist eine Erfindung von Bill Gates um uns Microchips einzupflanzen.") ist falsch.

(iii) Die Aussage ("$42 < 0$" $\wedge$ "$42 \geq 0$") ist falsch.

(iv) Die Aussage ("$42 < 0$" $\wedge$ 'Corona ist eine Erfindung von Bill Gates um uns Microchips einzupflanzen.") ist falsch.

Aufgabe 2.8. Sei A eine Aussage. Zeige mit Hilfe einer Wahrheitstafel, dass $(A \wedge \neg A)$ falsch ist.

Wir nennen $(A \wedge \neg A)$ auch eine **Kontradiktion**.

Als Abschwächung zum "Und" verwenden wir das (inklusive) "Oder", d.h. wir untersuchen, ob A oder B wahr ist.

Definition 2.9 (Disjunktion)**.** Die *Disjunktion* $(A \vee B)$ zwischen zwei Aussagen A und B, gelesen als "A oder B", ist gegeben durch die Wahrheitstafel:

A	B	$(A \vee B)$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Beachte: Das Oder in $A \vee B$ ist ein inklusives Oder, welches ein Und einschließt. Die Reihenfolge spielt keine Rolle. Wir sagen auch: Die logische Operation $\vee$ ist kommutativ.

Aufgabe 2.10. Überlege dir zu jedem Eintrag der Wahrheitstafel einen Beispielsatz.

Satz 2.11. *Sei A eine Aussage. Dann gilt $(A \vee \neg A)$ ist wahr.*

Beweis. Es gilt folgende Tafel:

A	$\neg A$	$(A \vee \neg A)$
w	f	w
f	w	w

□

Wir nennen $(A \vee \neg A)$ eine **Tautologie**

Aufgabe 2.12. Überlege dir, wie man ein "entweder ... oder ... " (welches das Und ausschließt) mit Hilfe der bisher bekannten logischen Verknüpfungen ausdrücken kann.

Eine weitere Bemerkung zur Wahrheitstafel der Disjunktion ist folgende Aussage: Nur wenn A und B beide nicht wahr sind, dann ist $(A \vee B)$ falsch. Bevor wir diesen Zusammenhang mathematisch richtig formulieren können, benötigen wir noch eine Wahrheitstafel für den Sachverhalt, den wir im vorherigen Abschnitt schon betrachtet haben, dass aus einer Aussage A eine Aussage B folgt.

Definition 2.13 (Implikation)**.** Eine Aussage A *impliziert* eine Aussage B, in Zeichen $A \Rightarrow B$, wenn gilt: Immer dann, wenn A wahr ist, so ist auch B wahr. Wir lesen $A \Rightarrow B$ als "A impliziert B" oder "aus A folgt B" oder "gilt A, dann gilt auch B".

Das entspricht der folgenden Wahrheitstafel:

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Im Zusammenhang mit Implikationen tauchen in mathematischen Texten oft die Wörter notwendig und hinreichend auf. Wenn für Aussagen A und B die Implikation $A \Rightarrow B$ gilt, so heißt A **hinreichend** für B (d.h. A gilt nur dann, wenn B gilt) und B heißt **notwendig** für A (d.h. B gilt, wenn A gilt).

Bemerkung 2.14. (i) Eine Beobachtung, die zunächst vielleicht irritiert: Wenn A nicht gilt, so ist $A \Rightarrow B$ immer richtig, d.h. **aus einer falschen Aussage kann wahrheitsgemäß alles gefolgert werden**. Formal wird $A \Rightarrow B$ auch als $\neg A \vee B$ definiert.

(ii) Man beachte: Das "Wenn... dann" der klassischen Aussagenlogik sagt (per Definition) nur etwas über das Auftreten der möglichen Verteilung von Wahrheitswerten aus. Das sagt erstmal nichts über einen kausalen oder inneren Zusammenhang der Aussagen aus, was die folgenden Beispiele zeigen.

Beispiel 2.15. (i) Die Aussage ("Wenn es draußen regnet es, sind Wolken am Himmel.") ist wahr.

(ii) Die Aussage ("Es sind Wolken am Himmel, also regnet es draußen.") ist im Allgemeinen nicht wahr. Es ist möglich, dass Wolken am Himmel sind, es aber nicht regnet. Die Aussage ("Wenn Berlin die Hauptstadt Deutschlands ist, dann liegt London in Frankreich.") ist falsch.

(iii) Die Aussage ("Die Sonne scheint, also ist 2 ist eine gerade Zahl.") ist wahr, da "2 ist eine gerade Zahl" immer wahr ist. Also ist z.B. auch die Aussage ("Wenn Katzen 5 Ohren haben, dann ist 2 ist eine gerade Zahl.") wahr.

(iv) Die Aussage ("Wenn Katzen 5 Ohren haben, dann ist 3 ist eine gerade Zahl.") ist ebenfalls wahr.

Aufgabe 2.16. Mache dir anhand von Beispielsätzen klar, warum die Gültigkeit von $A \Rightarrow B$ weder die Gültigkeit von $\neg A \Rightarrow \neg B$ noch die Gültigkeit von $B \Rightarrow A$ impliziert.

Noch stärker als die Implikation ist die Äquivalenz zweier Aussagen.

Definition 2.17 (Äquivalenz)**.** Zwei Aussagen A und B heißen *äquivalent*, wenn $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ gilt, d.h. A und B haben den gleichen Wahrheitswert. Wir schreiben kurz $A \Leftrightarrow B$. Die dazugehörige Wahrheitstafel:

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	w
w	f	f	w	f
f	w	w	f	f
f	f	w	w	w

Eine Aussage der Form

$$A \Leftrightarrow B$$

lesen wir auch als "Es gilt A **genau dann, wenn** B gilt. " Andere Formulierungen, die sich hierzu eingebürgert haben, sind:

> A ist gleichwertig/gleichbedeutend mit B; A ist notwendig und hinreichend für B;
> Es gilt A dann und nur dann, wenn B gilt; A ist ein Kriterium für B.

Manchmal benutzt man auch das Symbol $:\Leftrightarrow$ um eine neue Aussage zu definieren. Hierbei handelt es sich um eine Festlegung einer Bezeichnung und nicht um eine "echte" Äquivalenz.

Äquivalenzen

Eine Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$, egal in welcher Form sie ausgedrückt ist, besteht immer aus einer "*Hinrichtung*" $A \Rightarrow B$ und einer "*Rückrichtung*" $B \Rightarrow A$. Jeder Beweis einer Äquivalenzaussage muss per Definition aus diesen zwei Teilen bestehen. Es gibt wenige Ausnahmen, z.B. wenn man weiß sowas wie $A \Leftrightarrow C$ und $C \Leftrightarrow B$ oder die Aussagen z.B. durch Äquivalenzumformungen ineinander überführt werden können. Diese werden wir in Abschnitt 2.2 nochmal gesondert betrachtet. Insgesamt sollte man aber immer sehr vorsichtig sein, wenn man Äquivalenzen behauptet. Im ersten Semester raten wir zur konsequenten Einzelbehandlung von Hin- und Rückrichtung.

Wir kennen schon ein Beispiel einer Aussagenäquivalenz. Aus Satz 1.10 und Satz 1.13 folgt:

Satz 2.18. *Eine ganze Zahl n ist genau dann gerade, wenn ihr Quadrat n^2 gerade ist.*

Aufgabe 2.19. Zeige die folgende Äquivalenz: Seien $n, m \in \mathbb{Z}$ und $m \neq 0$. Dann gilt

$$\frac{n}{m} \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad m \mid n.$$

Satz 2.20 (Gesetze von De Morgan). *Seien A und B Aussagen. Dann gilt*

(i) $\neg (A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$,

(ii) $\neg (A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$.

Beweis. (i) Beachte, es sind zwei Richtungen zu zeigen:

- Hinrichtung: $\neg (A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ und
- Rückrichtung: $(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg (A \vee B)$.

Wir betrachten die folgende Wahrheitstafel:

A	$\neg A$	B	$\neg B$	$\neg (A \vee B)$	$(\neg A \wedge \neg B)$	$\neg (A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$	$(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg (A \vee B)$
w	f	w	f	f	f	w	
w	f	f	w	f	f	w	

(ii) Es sind wieder zwei Richtungen zu zeigen: $\neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)$ und $(\neg A \vee \neg B) \Rightarrow \neg(A \wedge B)$. Wir betrachten die folgende Wahrheitstafel:

A	$\neg A$	B	$\neg B$	$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A \vee \neg B)$	$\neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)$	$(\neg A \vee \neg B) \Rightarrow \neg(A \wedge B)$

□

Aufgabe 2.21. Vervollständige die Wahrheitstafeln aus dem Beweis von Satz 2.20.

Hier kommen die für uns wichtigsten Regeln der Aussagenlogik.

Lemma 2.22. *Seien A und B Aussagen. Dann gilt:*

(i) $A \Leftrightarrow \neg\neg A$ *(Doppelnegationsregel).*

(ii) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ *(Kontrapositionsregel).*

(iii) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ *(Widerspruchsregel).*

Beweis. Übung! □

Aufgabe 2.23. Wie negiert man eine Implikation? Nutze Lemma 2.22 um $\neg(A \Rightarrow B)$ umzuschreiben. Bilde damit die Negation der folgenden Aussagen:

(i) "Wenn es regnet, ist die Straße nass."

(ii) Ist n eine gerade Zahl, so ist n^2 eine gerade Zahl.

2.2 Äquivalenzumformungen

Bei den Umformungen von (Un-)Gleichungen werden häufig Äquivalenzzeichen benutzt. **Äquivalenzumformungen** sind aber nur solche, die umkehrbar sind. Das trifft nicht auf alle Operationen zu, die man auf eine Gleichung anwenden kann. Hier ein Beispiel: Sei x eine reelle Zahl. Dann gilt:

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1,$$

aber

$$x^2 = 1 \not\Leftrightarrow x = 1.$$

Hier gilt nur die Rückrichtung.

Aufgabe 2.24. Untersuche, welche Umformungen in jedem Schritt gemacht wurden und entscheide, ob es sich um eine Äquivalenzumformung handelt.

(i) Sei $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 3x^2 + 4x + 5 &= -x^3 + x + 4 \\ x^3 + 3x^2 + 3x + 1 &= 0 \\ (x+1)^3 &= 0 \\ x + 1 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

(ii) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ und $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 4x^2 &= (a^2 + b^2)^2 \\ 2x &= a^2 + b^2 \\ x &= \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

Aufgabe 2.25. Finde den Fehler im Beweis des folgenden Satzes.

Satz. *Alle reellen Zahlen sind gleich.*

Beweis. Ohne Einschränkung reicht es den Spezialfall zu zeigen, dass $1 = 2$. Seien nun $a, b \in \mathbb{R}$. Wir formen die Gleichung $a = b$ um:

$$\begin{aligned} && a &= b \\ \iff && a^2 &= ab \\ \iff && 2a^2 &= a^2 + ab \\ \iff && 2a^2 - 2ab &= a^2 - ab \\ \iff && 2(a^2 - ab) &= 1(a^2 - ab) \\ \iff && 2 &= 1. \end{aligned}$$

Damit folgt unsere Behauptung. □

2.3 Direkter Beweis, Kontraposition und Widerspruchsbeweis

Auf Grundlage von Lemma 2.22 können wir nun drei verschiedene Beweisprinzipien formulieren.

Wenn wir also eine mathematische Behauptung der Form

$$A \Rightarrow B$$

beweisen wollen, können wir folgendermaßen vorgehen:

(i) **Direkter Beweis:** Bei einem direkten Beweis gilt es die Aussage A mit endlich vielen Schritten so in Aussagen $A_1, \dots, A_n$ umzuformen, dass eine *Implikationskette* der Form

$$A \;\Rightarrow\; A_1 \;\Rightarrow\; \dots \;\Rightarrow\; A_i \;\Rightarrow\; \dots \;\Rightarrow\; A_n \;\Rightarrow\; B$$

entsteht. Hierbei soll dann jeder Zwischenschritt *offensichtlich* wahr sein. Typischerweise wird eine solche Implikationskette so geformt, dass wir zunächst voraussetzen, dass A gilt und dann mit Hilfe von Axiomen und bereits gezeigten Aussagen die Aussage B herleiten.

(ii) **Beweis durch Kontraposition (auch indirekter Beweis genannt)**: Wir verwenden die Kontrapositionsregel, die besagt, dass $(A \Rightarrow B)$ gleichbedeutend ist mit $(\neg\, B \Rightarrow \neg A)$. Ziel im Kontrapositionsbeweis ist es dann die Aussage $(\neg\, B \Rightarrow \neg A)$ mittels eines direkten Beweises zu zeigen. Das heißt, wir gehen in diesem Fall davon aus, dass B nicht gilt und wollen zeigen, dass dann A nicht gilt.

(iii) **Widerspruchsbeweis:** Wir verwenden die Widerspruchsregel, das heißt wir nehmen an, dass A wahr ist, aber gleichzeitig B nicht wahr ist. Wir müssen dann zeigen, dass in jedem Fall $A \wedge \neg B$ nicht gilt, das heißt wir müssen die Aussage $A \wedge \neg B$ zu einem Widerspruch führen. Hierbei ist es im Allgemeinen nicht klar, wo dieser Widerspruch entstehen könnte; der Widerspruch könnte entstehen zu einer bisher gezeigten Aussage oder aber zu unserem Axiomensystem. Beachte auch, dass wenn $\neg A \wedge B$ wahr ist, über den Wahrheitswert von $A \Rightarrow B$ im Allgemeinen nichts ausgesagt werden kann.

Kommen wir zu ein paar Beispielen. Zuerst zeigen wir, wie man Satz 1.13 viel leichter als zuvor indirekt beweist. Wir wiederholen die Aussage:

Satz. *Sei $n \in \mathbb{Z}$. Ist n^2 eine gerade Zahl, so ist auch n gerade.*

Beweis von Satz 1.13 (Version 2). Es ist für eine ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ zu zeigen:

$$\underbrace{n^2 \text{ ist gerade}}_{=:A} \Rightarrow \underbrace{n \text{ ist gerade}}_{=:B}.$$

Wir zeigen dies via Kontraposition. Dazu überlegen wir zuerst, was die Negation der Aussagen A und B ist:

$$\begin{aligned} \neg A: &\quad n^2 \text{ ist ungerade} \\ \neg B: &\quad n \text{ ist ungerade.} \end{aligned}$$

Es ist also zu zeigen:

$$\underbrace{n \text{ ist ungerade}}_{=\neg B} \Rightarrow \underbrace{n^2 \text{ ist ungerade}}_{=\neg A}.$$

Angenommen also n sei ungerade. Dann existiert eine ganze Zahl k mit $n = 2k+1$. Wir berechnen damit n^2:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Es folgt, dass $n^2 = 2m + 1$ mit $m := 2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$ und damit ungerade ist. □

In der folgenden Aufgabe soll eine Äquivalenzaussage bewiesen werden. Eine Richtung lässt sich ohne Probleme direkt beweisen. Bei der anderen Richtung bietet sich viel eher ein indirekter Beweis an.

Aufgabe 2.26. Zeige die folgende Äquivalenz. Sei $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist $11n - 7$ genau dann gerade, wenn n ungerade ist.

Wir kehren nun zu Satz 2.2 und Theorem 2.3 zurück. Wir wiederholen jeweils die Aussagen.

Satz. *Die Zahl $\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl.*

Beweis. Als Implikation lässt sich der Satz z.B. folgendermaßen ausdrücken:

Ist q eine rationale Zahl, so gilt $q \neq \sqrt{2}$.

Wir zeigen dies mithilfe eines Widerspruchsbeweis. Das heißt wir nehmen an:

q ist eine rationale Zahl und $q = \sqrt{2}$.

Das bedeutet, es gibt ganze Zahlen n, m mit $m \neq 0$ sodass $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass n, m teilerfremd sind. Wir formen diesen Ausdruck um:

$$\frac{n}{m} = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n^2}{m^2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{n^2 = 2m^2}_{(\star)}.$$

Aus der Gleichung $(\star)$ folgt, dass n^2 gerade ist. Aus Satz 1.13 folgt, dass n bereits gerade ist. Es gibt also eine ganze Zahl k, sodass $n = 2k$. Setzen wir dies wieder in $(\star)$ ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} & (2k)^2 = 2m^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 4k^2 = 2m^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 2k^2 = m^2. \end{aligned}$$

Damit folgt aber, dass m^2 und damit auch m gerade ist. Das bedeutet aber, dass n und m den gemeinsamen Teiler 2 besitzen. Damit sind sie aber nicht teilerfremd. Das ist ein Widerspruch zu einer unserer Annahmen. $\square$

Beim Widerspruchsbeweis einer Aussage $A \Rightarrow B$ nehmen wir an, dass $A \wedge \neg B$ gilt und führen dies zum Widerspruch. Der Widerspruch muss aber nicht direkt zur Annahme A entstehen.

Einen Widerspruch kennzeichnet man manchmal auch durch einen Blitz: $\lightning$

Weiter zum nächsten Beispiel:

Satz (Satz von Euklid)**.** *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Beweis. Wir zeigen dies per Widerspruchsbeweis. Wir nehmen an, es gäbe nur endlich viele Primzahlen. Dann können wir diese mit $p_1, p_2, \ldots, p_n$ bezeichnen. Wir nehmen also an, dass dies uns eine vollständige Liste aller Primzahlen gibt. Wir betrachten nun die Zahl

$$m = \prod_{i=1}^{n} p_i + 1.$$

Dann ist m insbesondere > 1 und besitzt damit eine Primfaktorzerlegung nach Lemma 1.14. Insbesondere muss eine solche Zahl durch eine Primzahl teilbar sein. Das kann aber keine Zahl von unserer bisherigen Liste sein: Bei Division durch p_i für $i = 1, \dots, n$ bleibt immer der Rest 1. Unsere Liste kann also nicht vollständig sein. Das ist ein Widerspruch zu unserer Annahme. Es muss also unendlich viele Primzahlen geben. $\square$

Aufgabe 2.27. Zeige die folgende Aussage indirekt: Es gibt keine ganzen Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$, sodass $18a + 6b = 1$.

Beweisprinzipien

Angenommen, du sitzt an einer Übungsaufgabe, in der etwas zu beweisen ist. Im ersten Schritt hast du schon ein paar unserer Tipps angewandt: Du verstehst alle vorkommenden Symbole und Begriffe und hast klar identifiziert, was vorausgesetzt wird und was zu zeigen ist. Du konntest also insbesondere die Aufgabe schon ausdrücken als Behauptung der Form $A \Rightarrow B$ und stellst dir jetzt die Frage, wie du deinen Beweis ansetzen sollst. Wie erkennt man also, ob ein direkter Beweis möglich ist oder ob man indirekt argumentieren sollte? Ganz allgemein lässt sich das nicht beantworten. [a] Der einzige wirklich universelle Tipp hierzu ist: Einfach mal ausprobieren. Schau erstmal, wie weit du mit einer direkten Argumentation kommst und wenn das nicht klappt, versuche herauszuarbeiten, wieso du damit nicht weiter kommst. Kommst du irgendwann gar nicht weiter, ändere die Strategie und beginne mit der Annahme $\neg B$ oder $A \wedge \neg B$ und schaue, wie weit du damit kommst.

Dieses Skript kann ggf. dabei helfen, eine grobe Intuition zu bekommen, wann welcher Ansatz vielversprechend sein kann: Die Beispiele, in denen wir hier mit indirekten Beweisansätze erfolgreich waren, waren solche, in denen wir durch die Annahme von $\neg B$ bzw. $A \wedge \neg B$ in einem "praktischeren" Anfangspunkt waren. Im Fall von Satz 1.13 war es "praktischer" mit der Annahme, eine ganze Zahl n sei ungerade, zu beginnen und zu folgern, dass n^2 ungerade ist, als direkt aus der Annahme, dass n^2 gerade ist, zu folgern, dass n gerade ist. Das lag auch daran, dass die Negation von "n ist eine gerade Zahl" lautet "n ist eine ungerade Zahl" und ungerade Zahlen eine sehr "praktische" Darstellung als $n = 2k + 1$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ haben. Dies ist nicht mehr der Fall, wenn man die Behauptung folgendermaßen verallgemeinert:

Satz. *Sei $n \in \mathbb{Z}$ und p eine Primzahl. Wenn p ein Teiler von n^2, dann ist p auch ein Teiler von n.*

Allgemein ist die Negation von "p ist ein Teiler von n" einfach nur "p ist kein Teiler von n" und ausgehend von der Nicht-Existenz einer Darstellung der Form $n = p \cdot k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ ist es viel schwerer weiter zu machen. In diesem Fall wäre also ein direkter Beweis tatsächlich sinnvoller und funktioniert sogar komplett analog zum ersten Beweis von Satz 1.13. Der Grund, warum hier ein direkter Beweis besser funktioniert ist übrigens der gleiche, warum z.B. im Fall von Satz 2.2 in direkter Beweis nicht so recht funkionieren will: In beiden Fällen steckt in der Konklusion B die Nicht-Existenz einer bestimmten Darstellung. Im Fall des Beweises der Irrationalität von $\sqrt{2}$ ist zu zeigen, dass für alle $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ folgt, dass $\sqrt{2} \neq \frac{a}{b}$. Hier nehmen wir das Gegenteil an und führen die Aussage, es gibt $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ mit $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ zum Widerspruch. Wir nutzen dabei aus, dass wir eine vorausgesetzte Gleichheit viel leichter "weiter verarbeiten" können als eine vorausgesetze Ungleichheit.

Aufgabe 2.28. Gehe die bereits betrachteten Beweise aus dem Skript und den Übungsaufgaben durch und überlege dir, warum das jeweilige Beweisprinzip benutzt wurde bzw. ob auch ein anderes Beweisprinzip (genauso gut) funktionieren könnte.

[a] Beachte: Es gibt durchaus Aufgabentypen, die fast immer mit einer bestimmtem Methode bewiesen werden. So z.B. Aussagen der Form "Für alle natürlichen Zahlen n (größer oder gleich einem gegebenen Wert) gilt $A(n)$", wobei $A(n)$ eine von n abhängige Aussage (genauer: Aussageform, siehe Abschnitt 2.4) bezeichne, welche in der Regel mithilfe der Methode der *vollständigen Induktion* gezeigt werden. Diese Methode lernen wir in Abschnitt 3 kennen.

2.4 Ein Ausflug in die Quantorenlogik

Viele mathematische Aussagen sollen für bestimmte oder auch alle Objekte "einer Art" (z.B. natürliche oder reelle Zahlen) gelten. Um solche Formulierungen soll es jetzt gehen.

In diesem Zusammenhang betrachten wir sogenannte **Aussageformen**, auch **Prädikate** genannt, und meinen damit ein sprachliches Gebilde, das von einer freien Variable x abhängt, und nach Einsetzen eines Wertes für x zu einer Aussage wird. Wir schreiben dies auch als $A(x)$ bzw. $A(\cdot)$. Implizit können wir auch Annehmen, dass wir x nur aus einer bestimmten Grundmenge X einsetzen. Wir sprechen dann von einer Aussageform auf X. Wenn man es formal korrekt definieren möchte, dann könnte man das z.B. so tun (manche vorkommenden Begriffe lernen wir aber erst in den folgenden Abschnitten):

Definition 2.29. Sei X eine Menge. Eine Abbildung $A\colon X \to \{w, f\}, x \mapsto A(x)$ heißt *Aussageform*. Insbesondere ist $A(x)$ eine Aussage, deren Wert vom Wert der Variable $x \in X$ abhängt.

Beispiel 2.30. Betrachte

$$A(n): \quad \text{“}n \text{ ist eine gerade Zahl.”}$$

Das ist keine Aussage, solange nicht spezifiziert ist, was n ist. In diesem Fall könnten wir $X = \mathbb{Z}$ wählen. Sobald wir eine (konkrete) natürliche Zahl n in $A(\cdot)$ einsetzen, ist $A(n)$ eine Aussage, d.h. besitzt einen eindeutigen Wahrheitswert.

Nun benutzen wir sogenannte **Quantoren**, genauer den **Allquantor** und den **Existenzquantor** um komplexere Aussagegebilde zu formulieren.

Der Allquantor

Sei X eine Menge, z.B. eine Klasse bestimmter mathematischer Objekte. Sei $A(x)$ eine Aussageform. Eine **Allaussage** ist eine Aussage der Form

Für alle x in M gilt $A(x)$.

Anstatt der Formulierung "Für alle... gilt..." benutzen wir den Quantor $\forall$, genannt **Allquantor**. Das Wort "gilt" ersetzen wir formal durch einen Doppelpunkt. Die neue formale Schreibweise der obigen Aussage ist also

$$\forall x \in X : A(x).$$

Ganz wichtig: Der Allquantor ist keine fancy Art "Für alle" zu schreiben und sollte nicht so benutzt werden. Er bezieht sich immer auf eine Variable und eine Aussageform, welche von der Variablen abhängt. Es entsteht eine Aussage, die nicht mehr von der Variablen abhängt.

In mathematischen Texten wird nicht immer alles formal in Quantoren ausgedrückt. Ihr werdet auf verschiedene Formulierungen von Allaussagen stoßen, wie zum Beispiel:

- Sei $x \in X$ beliebig. Dann gilt $A(x)$;
- Jedes Element aus X erfüllt $A(x)$;
- Für jedes x in X gilt $A(x)$;
- Ist $x \in X$, so gilt $A(x)$;

- ...

Soll eine Allaussage der Form $\forall x \in X : A(x)$ bewiesen werden, so beginnt man den Beweis in der Regel folgendermaßen:

> Sei $x \in M$ (beliebig). Zu zeigen ist, dass $A(x)$ gilt.

Dann folgt der Beweis von Aussage $A(x)$. Wichtig ist, dass man zwar einen festen Vertreter x aus X wählt, dieser aber für ein **beliebiges** Element steht, d.h. keine spezielle Wahl beinhaltet. Ansonsten zeigt man die Aussage $A(x)$ nur für ein bestimmtes $x \in X$.

Beispiel 2.31. Wir können unser Einstiegsbeispiel auch als Allaussage formulieren. In Worten wäre das z.B.

Für alle geraden Zahlen n gilt, dass n^2 gerade ist.

Das geht auch formaler. Bezeichne dazu E die Menge aller geraden Zahlen. Wir schreiben:

$$\boxed{\forall n \in E : n^2 \in E.}$$

Alternativ können wir dies auch einfach schreiben als

$$\forall n \in \mathbb{Z} : (n \text{ ist gerade } \Rightarrow n^2 \text{ ist gerade}).$$

Eine Aussageform kann auch von mehreren Variablen x, y abhängen. Wir schreiben dann $A(x, y)$. Wir können dann auch Allaussagen formulieren. Diese sind dann der Form

$$\forall x \forall y : A(x, y),$$

gelesen als "Für alle x und alle y gilt $A(x, y)$." Bemerke, dass die Reihenfolge der Allquantoren hier keine Rolle spielt.

Beispiel 2.32. Wir schreiben die Aussage aus Aufgabe 1.12 um.

Für alle geraden Zahlen n und gerade Zahlen m ist $n + m$ gerade.

Das geht auch formaler. Bezeichne E wieder die Menge aller geraden Zahlen. Wir schreiben:

$$\boxed{\forall n \in E\, \forall m \in E : n + m \in E.}$$

Bemerkung 2.33. Es gibt ein grundlegendes Beweisverfahren, um Aussagen der Form

$$\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$$

zu zeigen, nämlich die *vollständige Induktion*, welche wir im nächsten Abschnitt behandeln werden.

Schließlich wollen wir noch wissen, wie man eine Allaussage richtig negiert. Machen wir das zuerst anhand folgender Aussage:

> "Alle Katzen sind schwarz."

Um diese Aussage zu widerlegen, reicht es bereits *eine* Katze zu finden, die nicht schwarz ist. Die Negation der Aussage also

> "Es gibt (mindestens) eine Katze, die nicht schwarz ist."

Das führt uns auch direkt zur Definition eines weiteren Quantors, dem Existenzquantor.

Der Existenzquantor

Sei X eine Menge, z.B. eine Klasse bestimmter mathematischer Objekte. Sei $A(x)$ eine Aussageform. Eine **Existenzaussage** ist eine Aussage der Form

> Es existiert (mindestens) ein x in X, für das $A(x)$ gilt.

Anstatt der Formulierung "Es existiert" benutzen wir den Quantor $\exists$, genannt **Existenzquantor**. Die neue formale Schreibweise der obigen Aussage ist also

$$\exists x \in X : A(x).$$

Möchte man sagen, dass es **genau ein** (ein und nur ein) solches x gibt, so benutzt man den Quantor $\exists!$ und schreibt

$$\exists! x \in X : A(x).$$

Auch hier ganz wichtig: Diese Existenzquantoren sind keine fancy Art "Es existiert (genau ein)" zu schreiben und sollten nicht so benutzt werden. Sie beziehen sich auch auf eine Variable und eine Aussageform und binden die freie Variable.

Auch hier tauchen in Texten verschiedene Formulierungen auf, wie z.B.

- Es gibt (genau) ein $x \in X$ mit $A(x)$;
- Für geeignetes x aus X gilt $A(x)$;
- ...

Anders als bei einer Allaussage, lässt sich eine Existenzaussage ($\exists x \in X : A(x)$) durch das Finden eines Beispiels beweisen. Beispielsweise folgt die Behauptung

> "Es gibt eine gerade Primzahl."

bereits aus der Feststellung, dass die Zahl 2 eine Primzahl ist. Im Allgemeinen sind Existenzbeweise deshalb nicht einfacher. Es kann schwer bis unmöglich sein, ein konkretes Beispiel anzugeben. In diesem Fall kann die Existenz indirekt aus anderen Argumenten folgern (siehe z.B. Aufgabe 2.35) oder eine allgemeine Konstruktion angeben. In letzterem Fall sprechen wir auch von einem **konstruktiven Beweis**.

Eine eindeutige Existenzaussage ($\exists! x \in X : A(x)$) besteht aus zwei Teilen: Dem **Existenzteil**, den wir eben schon angesprochen haben, und dem **Eindeutigkeitsteil**. Gehen wir davon aus, der Existenzteil ist schon gezeigt und es gibt ein $x \in X$ mit $A(x)$. Für den Eindeutigkeitsteil nehmen wir nun an, dass es ein weiteres $x' \in X$ gibt mit $A(x')$. Es ist zu zeigen, dass $x' = x$ gelten muss.

Wir betrachten ein Beispiel zur eindeutigen Existenzaussage.

Satz 2.34. *Es gibt genau eine gerade Primzahl.*

Beweis. Der Existenzteil folgt, weil 2 eine Primzahl und gerade ist. Für den Eindeutigkeitsteil nehmen wir an, dass es eine weitere Primzahl p gibt, die gerade ist. Eine Primzahl zu sein bedeutet aber, dass p außer ± 1 und $\pm p$ keine weiteren Teiler haben darf. Da 2 jede gerade Zahl teilt, folgt schon $p = 2$. $\square$

Aufgabe 2.35. Beweise die folgende Existenzaussage mithilfe des Satzes von Euklid zur Unendlichkeit der Primzahlmenge (Theorem 2.3):

> **Korollar.** *Es gibt eine Primzahl, die größer ist als die größte bekannte Primzahl.*[3]

Sei $A(x, y)$ eine Aussageform, die von den Variablen x, y abhängt. Wir können Existenzaussagen der Form

$$\exists x \exists y : A(x, y)$$

betrachten, welche wir lesen als "Es existiert ein x und ein y, sodass $A(x, y)$ gilt." Die Reihenfolge der Existenzquantoren spielt wieder keine Rolle.

Schließlich wollen wir noch wissen, wie man eine Existenzaussage richtig negiert. Das machen wir wieder anhand einer Beispielaussage:

> "Es gibt Katzen, die schwarz sind."

Um diese Aussage zu widerlegen, müssen wir die Farbe aller Katze überprüfen. Die Negation der Aussage ist also

> "Keine Katze ist schwarz."

bzw.

> "Alle Katzen sind nicht-schwarz."

Wir stellen also fest:

> Die Verneinung einer Existenzaussage ist eine Allaussage und umgekehrt. Formal heißt das:
>
> $$\neg(\forall\, x \in X : A(x)) \quad \text{entspricht} \quad \exists x \in X : \neg A(x),$$
>
> bzw.
>
> $$\neg(\exists x \in X : A(x)) \quad \text{entspricht} \quad \forall x \in X : \neg A(x).$$

Einen formalen Beweis für die obigen Regeln lassen wir an dieser Stelle aus.

Aufgabe 2.36. Die Negation einer Existiert-Genau-Ein-Aussage ist keine Allaussage. Überlege dir dazu ein Beispiel.

[3] Es ist für die Aufgabe nicht relevant, aber die aktuell größte bekannte Primzahl ist $2^{82589933} - 1$ und besitzt 24862048 Ziffern. (Stand: März 2021)

Wir wollen nun die obigen Regeln benutzen, um Beispielaussagen zu negieren. Dabei solltet ihr darauf achten, dass ihr nicht nur die Quantoren richtig umdreht, sondern auch die Aussage $A(x)$ richtig negiert. Dazu können verschiedene Erkenntnisse aus dem Abschnitt zu Aussagenlogik helfen (z.B. Satz 2.20, welcher erklärt, wie man Und- sowie Oder-Aussagen negiert).

Aufgabe 2.37. Negiere die folgenden Aussagen:

(i) $\exists n \in \mathbb{N} : n \leq 0$;

(ii) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$;

(iii) "Alle Serien habe ich bereits geschaut oder sie sind nicht auf Netflix."

(iv) "Es gibt Katzen, die schwarz oder weiß sind."

Reihenfolge und Rechenregeln von Quantoren

Kommt mehr als ein Quantor in einem Satz vor, muss man besonders aufpassen.

⚠ Es kommt im Allgemeinen auf die Reihenfolge der Quantoren an: **Existenz- und der Allquantor vertauschen nicht.** Es ist manchmal an der Formulierung schwer zu erkennen, ob es sich um eine $\exists\forall$- oder eine $\forall\exists$-Aussage handelt. Deshalb immer genau lesen und eventuell nochmal für dich selbst in formaler Schreibweise aufschreiben.

Beispiel 2.38. Wir betrachten die beiden Sätze

"Für jeden Topf gibt es einen passenden Deckel."

und

"Es gibt einen Deckel, der auf jeden Topf passt."

Der Unterschied: Im ersten Satz behaupte ich, dass ich für einen beliebigen Topf immer einen Deckel finde, der darauf passt. Im zweiten Satz behaupte ich hingegen, dass es einen Deckel gibt, der für alle Töpfe passt.

Hier ein Beispiel aus der Mathematik.

Beispiel 2.39. Wir betrachten sie Aussage

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} : \frac{n}{m} \notin \mathbb{Z}.$$

Diese Aussage ist wenig erkenntnisreich, aber dennoch wahr. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Es reicht eine natürliche Zahl m zu finden, sodass $\frac{n}{m}$ keine ganze Zahl ist. Das gilt für alle m, die n nicht teilen, wie wir in Aufgabe 2.19 gesehen habe. Damit haben wir unsere Behauptung aber nur umformuliert. Es bleibt zu zeigen: Es gibt eine ganze Zahl m, die n nicht teilt. Hier reicht es ein Beispiel anzugeben. Das ist aber einfach, z.B. funktioniert $m = n + 1$.

Wir bemerken außerdem, dass die obige Aussage nicht gleichbedeutend ist mit der Aussage:

$$\exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : \frac{n}{m} \notin \mathbb{Z}.$$

Diese können wir zuerst auch umformulieren mit Hilfe von Aufgabe 2.19. Dann lautet die Aussage: Es gibt eine ganze Zahl m, die keine andere ganze Zahl teilt. Das ist falsch. Wähle z.B. $n = m$.

Aufgabe 2.40. Begründe warum die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(i) $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} : n = m$; (iii) $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} : n > m$; (v) $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m$;

(ii) $\exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n = m$; (iv) $\exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n > m$; (vi) $\exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq m$.

Beispiel 2.41. Schwierigen Kombinationen alternierender Quantoren werdet ihr vor allem in der Analysis begegnen. Die Aussage "Die Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt den Grenzwert 0. " schreiben wir formal als

$$\forall \epsilon > 0 \ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq n_0 \ : \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Man merke sich: Eine Aussage, die mit einer Quantorenfolge beginnt, z.B.

$$\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \ldots : A(x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

wird negiert, indem man die Allquantoren mit Existenzquantoren vertauscht und den aussagenlogischen Kern negiert. Im obigen Fall erhält man also etwas der Form

$$\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \ldots : \neg A(x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

Hier ein Beispiel aus der Analysis:

Definition 2.42 (Stetigkeit)**.** Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $x \in M$. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt *stetig in x*, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \forall y \in \mathbb{R} : (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Aufgabe 2.43. Negiere die Definition von Stetigkeit.

Aufgabe 2.44. Entscheide (ohne Beweis), welche der folgenden Rechenregeln für Quantoren gelten:

(i) $\exists x : P(x) \vee Q(x) \Leftrightarrow (\exists x : P(x)) \vee (\exists x : Q(x))$; (iii) $\forall x : P(x) \wedge Q(x) \Leftrightarrow (\forall x : P(x)) \wedge (\forall x : Q(x))$;

(ii) $\forall x : P(x) \vee Q(x) \Leftrightarrow (\forall x : P(x)) \vee (\forall x : Q(x))$; (iv) $\exists x : P(x) \wedge Q(x) \Leftrightarrow (\exists x : P(x)) \wedge (\exists x : Q(x))$.

Sprache

Sprache ist manchmal mehrdeutig und manche mathematischen Begriffe entsprechen Alltagsbegriffen, haben aber eine ganz andere Bedeutung. Quantoren haben den Vorteil, dass sich Sachverhalte präzise formulieren lassen. Trotzdem sollte man nicht jede mathematische Aussage in logischen Formalismen formuliert werden. Diejenigen, die die Aussage lesen, sollen nicht mehr Zeit mit der Entzifferung der Formulierung als mit dem Verstehen der Aussage verbringen müssen.

Grundsätzlich gilt, dass mathematische Formulierungen dann gut sind, wenn sie den Inhalt ohne Mehrdeutigkeiten und so kompakt und übersichtlich wie möglich darstellen.

3 Vollständige Induktion

3.1 Induktionsprinzip

Die vollständige Induktion ist ein grundlegendes Beweisverfahren für Aussagen der Form *"Für alle natürlichen Zahlen n (mit $n \geq n_0$) gilt. . . "*. Hinter dem Prinzip steht die axiomatische Beschreibung der natürlichen Zahlen über die **Peano-Axiome**.

Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist durch folgende Axiome (Peano-Axiome) charakterisiert:

(i) $1 \in \mathbb{N}$;

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein Nachfolger $S(n)$ mit $S(n) \in \mathbb{N}$;

(iii) $\forall n, m \in \mathbb{N} : (n \neq m \Rightarrow S(n) \neq S(m))$;

(iv) $\forall n \in \mathbb{N} : S(n) \neq 1$;

(v) Sei X eine Menge sodass $1 \in X$ und für $n \in X$ folgt $S(n) \in X$. Dann folgt $\mathbb{N} \subseteq X$ (**Induktionsaxiom**).

Man bemerke, dass aus den Axiomen (i)-(iv) bereits folgt, dass es unendlich viele natürliche Zahlen gibt. Das Prinzip der **vollständigen Induktion** basiert nun auf Axiom (v) und nutzt aus, dass man, um eine Aussage für alle natürlichen Zahlen (ab einer bestimmten Zahl n_0) zu beweisen, nur die Aussage für die kleinste behauptete Zahl (also n_0) zeigen muss, sowie, dass aus der Gültigkeit der Aussage für eine Zahl n bereits die Gültigkeit der Aussage für $n+1$ folgt. Gilt die Aussage also für n_0, dann auch für $n_0 + 1$, also auch für $n_0 + 2, n_0 + 3$ und $n_0 + 4$ usw. – kurz gesagt: Dann gilt die Aussage für alle $n \geq n_0$. Man kann sich das Beweisprinzip als eine Art Dominoeffekt vorstellen.

Hier nochmal das Induktionsprinzip knapp und etwas formaler formuliert:

Sei $A(n)$ eine Aussage über natürliche Zahlen n. Der Induktionsbeweis besteht aus zwei Teilen:

1. **Induktionsanfang (IA):** Es gilt $A(n_0)$ (für ein festes $n_0 \in \mathbb{N}$).
2. **Induktionsschluss (IS):** Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt:

$$\text{Aus } A(n) \text{ folgt } A(n+1).$$

Dann gilt $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$.

Im Induktionsschluss nennt man $A(n)$ auch die **Induktionsvoraussetzung**.

Induktionsbeweise

Wenn du deine ersten Induktionsbeweise aufschreibst, solltest du dich am besten an folgendem Schema orientieren:

Zu zeigen: Für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ gilt die Aussage $A(n)$.

Beweis.

Induktionsanfang (IA). Beweis dafür, dass $A(n_0)$ gilt. (Meistens: direktes Nachrechnen)

Induktionsvoraussetzung (IV). Schreibe nochmal explizit auf, von was du im Induktionsschritt ausgehst. Das ist nicht zwingend notwendig, aber für den Anfang sehr hilfreich. Konkret:
Angenommen, die Aussage $A(n)$ gilt für ein (festes aber beliebiges) n mit $n \geq n_0$.

Induktionsschritt (IS). Beweise, dass unter Annahme von der Induktionsvoraussetzung (d.h. $A(n)$ gilt) auch die Aussage $A(n+1)$ gilt.

Es kann für den Induktionsschritt hilfreich sein, sich zunächst aufzuschreiben, was genau für Aussage $A(n+1)$ zu zeigen ist. Benutzt man im Beweis des Induktionsschritts die Induktionsvoraussetzung nicht, dann hat man (a) gar nicht Induktion für den Beweis der Aussage gebraucht oder (wahrscheinlicher) (b) etwas falsch gemacht. Oft besteht ein großer Teil der Arbeit darin, herauszufinden, wie man diese geschickt benutzten kann. Manchmal benötigt man zusätzlich ein echtes Argument. Dazu sehen wir jetzt einige typische und (hoffentlich) instruktive Beispiele.

3.2 Typische Beispielklassen

Das kanonische erste Beispiel eines Induktionsbeweises liefert die sogenannte Gaußsche Summenformel.[4]

Beispiel 3.1 (Gaußsche Summenformel)**.** Für alle natürliche Zahlen n gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis.

IA. Für $n = 1$ folgt $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

IV. Für ein (festes aber beliebiges) $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

IS. Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)$$

[4] Diese Summenformel war bereits in der vorgriechischen Mathematik bekannt, wurde aber angeblich vom neunjährigen Carl Friedrich Gauß entdeckt, als ein Lehrer den Auftrag gab, die Zahlen von 1 bis 100 zu addieren.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \qquad \text{(nach IV)}\\
&= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)\\
&= (n+1)\frac{(n+2)}{2}\\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.
\end{aligned}
$$

Damit ist die Aussage für alle natürliche Zahlen n gezeigt.

□

Bemerkung 3.2. Im Induktionsschritt im obigen Beweises war zu zeigen, dass wenn für ein (festes aber beliebiges) $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (IV), bereits folgt, dass

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \tag{*}$$

Um in (*) die Induktionsvoraussetzung einzusetzen, war es am einfachsten auf der linken Seite zu beginnen, da sich die Summe besonders leicht in die gewünschte Form bringen lässt, indem man den letzten Summanden (d.h.für den Index $n+1$) "herauszieht":

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k}_{=\frac{n(n+1)}{2} \text{ nach IV!}} + (n+1).$$

Der restliche Beweis bestand nur aus Termumformungen. Hierbei war hilfreich, direkt $(n+1)$ als gemeinsamen Faktor der Summanden zu erkennen. Manchmal sieht man solche "Rechentricks" nicht sofort. Dann kann es auch helfen, als eine Art Nebenrechnung die rechte Seite von (*) umzuformen, um die Gleichheit einzusehen. Aber Vorsicht: Am Ende sollte man (der allgemeinen Konvention folgend) deine Rechnung von oben nach unten lesen können.

Hier eine Aufgabe ähnlicher Bauart zum Üben.

Aufgabe 3.3. Zeige, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

Ganz ähnlich lassen sich übrigens auch Produktformeln beweisen. Hier ein Beispiel.

Beispiel 3.4. Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

Beweis. IA. Für $n = 2$ folgt $1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$.

IV. Für ein (festes aber beliebiges) $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$.

IS. Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung gilt

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
&= \frac{n+1}{2n}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) && \text{(nach IV)} \\
&= \frac{n+1}{2n}\cdot\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} \\
&= \frac{n^2+2n}{2n(n+1)} \\
&= \frac{n+2}{2(n+1)}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Aussage für alle natürliche Zahlen n gezeigt.

□

Ein weiterer klassischer Aufgabentyp für Induktionsaufgaben ist das Beweisen von Ungleichungen wie der folgenden.

Beispiel 3.5. Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$ gilt

$$n! > 2^n.$$

(Dabei ist $n! := \prod_{k=1}^{n} k$, ausgesprochen *n-Fakultät*.)

Beweis.

IA. Für $n = 4$ folgt $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 > 16 = 2^4$.

IV. Für ein (festes aber beliebiges) $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ gilt $n! > 2^n$.

IS. Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung gilt

$$\begin{aligned}
(n+1)! &= n!(n+1) \\
&> 2^n(n+1) && \text{(nach IV)} \\
&\geq 2^n \cdot 2 && \text{(weil } n \geq 4\text{, also } n+1 \geq 2\text{)} \\
&= 2^{n+1}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Aussage für alle natürliche Zahlen n gezeigt.

□

Bemerkung 3.6. Hier haben wir das erste einfache Beispiel dafür gesehen, dass der Induktionsschritt nicht nur aus Einsetzen der Induktionsvoraussetzung und algebraischen Umformen bestehen muss. In der letzten Abschätzung ein zusätzliches (wenn auch einfaches) Argument benötigt, nämlich dass aufgrund der Annahme $n \geq 4$ auch gilt $n + 1 \geq 5 \geq 2$.

Hier eine Aufgabe ähnlicher Bauart zum Üben.

Aufgabe 3.7. Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$ gilt

$$n^2 \geq 2n + 1.$$

(Bemerke: Diese Aussage kann man auch ohne Induktion zeigen.)

Wir kommen nun zur letzten typischen Beispielklasse für eine Induktionsbeweis – Teilbarkeitsbeweise. Hier ein Beispiel.

Beispiel 3.8. Für alle $n \geq 0$ ist $6^n + 4$ teilbar durch 5.

Beweis.

IA. Für $n = 0$ ist $6^0 + 4 = 5$ offenbar durch 5 teilbar.

IV. Für ein (festes aber beliebiges) $n \in \mathbb{N}_0$ ist $6^n + 4$ durch 5 teilbar. Das bedeutet es existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ sodass $6^n + 4 = 5k$.

IS. Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung gilt

$$\begin{aligned} 6^{n+1} + 4 &= 6 \cdot 6^n + 5 \\ &= 5 \cdot 6^n + (6^n + 5) \\ &= 5 \cdot 6^n + 5 \cdot k \qquad \text{(nach IV)} \\ &= 5 \cdot (6^n + k), \end{aligned}$$

d.h. $6^{n+1} + 4$ ist durch 5 teilbar. Damit ist die Aussage für alle ganzen Zahlen $n \geq 0$ gezeigt.

□

Hier eine Aufgabe ähnlicher Bauart zum Üben.

Aufgabe 3.9. Für alle natürlichen Zahlen n teilt 6 die Zahl $n^3 - n$.

Ihr werdet das Prinzip der vollständigen Induktion noch in vielen anderen Kontexten kennenlernen, z.B. in der Graphentheorie. Die Beweise sehen dann weniger formal aus, nutzen aber nichtsdestotrotz das Prinzip der Induktion. Hier ein Beispiel.

Beispiel 3.10. In der Ebene seien einige Geraden gegeben. Diese unterteilen die Ebene in mehrere Teile (genannt: Länder). Zeige, dass man die Länder mit zwei Farben so färben kann, dass benachbarte Länder immer verschiedene Farben haben. (Dabei heißen zwei Länder benachbart, wenn sie eine gemeinsame Grenze haben. Eine gemeinsame Ecke genügt nicht.)

Bevor wir mit dem Beweis einsteigen, müssen wir uns klar machen, über welche Größe wir die Induktion durchführen. In diesem Fall ist das die Anzahl der Geraden. Wir formulieren die Aussage etwas um:

> Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt: Ist die Ebene durch n Geraden in Ländern unterteilt, so kann man diese so mit zwei Farben färben, dass keine benachbarten Länder die gleiche Farbe haben.

Der Basisfall $n = 1$ ist einfach.[5] Eine Gerade teilt die Ebene immer in zwei benachbarte Länder, welche man entsprechend mit mit verschiedenen Farben färben muss. Es ist instruktiv, wenn auch für die Induktion nicht notwendig, sich zuerst die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ zu überlegen und dazu Zeichnungen anzufertigen, um auf die richtige Idee für den Induktionsschritt zu kommen. Der fertige Beweis kann dann folgendermaßen aussehen.

[5] Man könnte die Aussage auch für $n \geq 0$ formulieren – der Basisfall $n = 0$ besteht dann nur darin festzustellen, dass man die Ebene mit einer Farbe färben kann.

Beweis von Beispiel 3.10.

IA. Den Fall $n = 1$ haben wir oben diskutiert.

IV. Für eine (feste aber beliebige) natürliche Zahl n kann die durch n Geraden geteilte Ebene mit zwei Farben eingefärbt werden.

IS. Wir wollen zeigen, dass die Aussage auch für $n + 1$ stimmt. Gegeben $n + 1$ Geraden in der Ebene wählen wir nun eine beliebige Gerade g aus. Wir stellen fest, dass sich die Länder, die durch die übrigen n Geraden entstehen, nach Induktionsvoraussetzung mit zwei Farben gefärbt werden können. Man stelle sich die Länder nun entsprechend gefärbt vor. Die Gerade g teilt die Ebene in zwei Halbebenen H_1 und H_2. In der Halbebene H_1 belassen wir es bei der bisherigen Färbung. Auf der Halbebene H_2 tauschen wir die bisherigen Farben. So entsteht eine Färbung der durch $n + 1$ Geraden geteilten Ebene mit zwei Farben.

□

Unter den Übungsaufgaben am Ende dieses Skripts findet ihr ein geometrisches Induktions-Beispiel.

3.3 Eine nicht-standard Variante

Standardmäßig funktionieren Induktionsbeweise wie oben geschrieben indem man einen Basisfall $A(n_0)$ abhandelt und dann für ein festes aber beliebiges $n \geq n_0$ zeigt, dass wenn $A(n)$ gilt, so auch $A(n+1)$. Alternativ können wir aber auch folgendermaßen vorgehen: Im Induktionsanfang zeigen wir zuerst für ein $m \in \mathbb{N}$, dass eine Aussage $A(i)$ für alle $i = n_0, \dots, m$ wahr ist. Im Induktionsschritt reicht es dann zu beweisen, dass wenn für ein n die Aussage $A(n)$ gilt, so auch für $A(n + m)$. Diese Variation der Induktion bietet sich für gewisse Typen von Aussagen an. Hier ein Beispiel.

Beispiel 3.11. Jede natürliche Zahl $n > 7$ lässt sich schreiben als $3a + 5b$ für nicht-negative ganze Zahlen a, b.

Bemerkung: Das ist ein Spezialfall des Chicken McNugget Theorems (auch bekannt als Briefmarkenproblem oder Frobenius-Münzproblem).

Beweis. Wir nutzen nicht-standard Induktion mit $m = 3$.

IA. Die Aussage gilt für $n = 8, 9, 10$:

$$\begin{aligned} 8 &= 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \\ 9 &= 3 \cdot 3 + 5 \cdot 0 \\ 10 &= 3 \cdot 0 + 5 \cdot 2. \end{aligned}$$

IV. Für ein (festes aber beliebiges) $n > 7$ lässt sich n der Form $3a + 5b$ für nicht-negative ganze Zahlen a, b schreiben.

IS. Wir müssen zeigen, dass sich auch $n + 3$ in dieser Form schreiben lässt. Das gilt wegen

$$n + 3 \underset{\text{(IV)}}{=} 3a + 5b + 3 = 3(a + 1) + 5b.$$

□

Aufgabe 3.12. Zeige, dass sich für jedes $n > 5$ ein Quadrat in n kleinere Quadrate zerlegen lässt.

Wir haben uns in Abschnitt 1 und 2 mit den Grundbausteinen mathematischer Theorien beschäftigt: Definitionen, Sätze und Beweise. Unser Ausflug in die Logik hat es uns einerseits möglich gemacht, verschiedene Beweisprinzipien zu identifizieren und andererseits gezeigt, wie man Behauptungen formal präzise ausdrücken kann. Jetzt soll es etwas mehr darum gehen, über was wir eigentlich genau in der Mathematik sprechen. Das Grundprinzip von Mathematik liegt in der Definition und Studium bestimmter *Strukturen*. Diese Strukturen bestehen aus Objekten und den Beziehungen zwischen diesen Objekten. Die Basisstruktur der meisten Gebiete der Mathematik ist die **Menge** und Beziehungen zwischen Mengen werden mit Hilfe von **Abbildungen** ausgedrückt. Darum soll es in den nächsten beiden Abschnitten gehen.

4 Mengen

Die Geschichte der Mengenlehre beginnt überraschend spät. Sie wurde erst Mitte des 19. Jahrhunderts von Georg Cantor entwickelt. Die "naive" Mengentheorie, wie sie von Cantor entwickelt wurde, brachte Probleme mit sich, die durch Betrand Russell erstmals aufgedeckt wurden.[6] Dieses Defizit konnte behoben werden und Anfang des 20. Jahrhunderts hat sich ein bestimmtes Axiomensystem eingebürgert, welches als **Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre** bezeichnet wird. Es setzt die nötigen Eigenschaften, die wir brauchen, um mit Mengen umzugehen. Man bemerke, dass es sich an dieser Stelle aber auch nicht ziemt, von *den* Zermelo-Fraenkel-Axiomen zu sprechen, da es hiervon verschiedene Varianten gibt, die sich einerseits in der Art, wie sie formuliert sind, unterscheiden, aber auch darin, welche Axiome sie einschließen. Das sogenannte Auswahlaxiom ist dabei besonders umstritten.

Die genaue axiomatische Mengenlehre wird im Grundstudium jedoch sowieso sehr selten eine explizite Rolle spielen.[7] Die Formulierung der Axiome sind sehr abstrakt und nicht alle Axiome sind intuitiv. Deshalb arbeiten wir hier mit einem naiven Mengenbegriff und führen darauf aufbauend die relevanten Symbole und Operationen ein, mit denen ihr im ersten Semester lernen müsst umzugehen. Für alle diejenigen, die es etwas genauer wissen wollen, verweisen wir z.B. auf Kapitel 4.5 in [**SS09**].

4.1 Mengen und Teilmengen

Nach Cantor beschreiben wir eine **Menge** "naiv" als

> Zusammenfassung M von bestimmten *wohlunterschiedenen* Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (genannt **Elemente** von M) zu einem Ganzen.

Für Elemente von M schreiben wir auch $a \in M$ (sonst $a \notin M$). Welche "Objekte" man genau zu Mengen zusammenfassen darf, ist in der naiven Mengenlehre nicht genauer geregelt. Um unseren naiven Mengenbegriff vor Widersprüchlichkeiten zu schützen, fordern wir, dass Elementbeziehungen eindeutig sind, d.h. ein Objekt eindeutig Element einer Menge ist oder nicht. Elemente müssen *wohlunterschieden* sein, d.h. für $x, y \in M$ steht fest ob $x = y$ oder $x \neq y$. Mengen dürfen selbst auch als Elemente von Mengen auftreten. Auch nicht erlaubt ist die Zusammenfassung aller Mengen zu einer Menge aller Mengen.

[6] Siehe z.B. `https://de.wikipedia.org/wiki/Russellsche_Antinomie`.

[7] Im ersten Semester das erste Mal, wenn man die Existenz von Basen unendlich-dimensionaler Vektorräume beweisen möchte. Hier benutzt man das sog. *Lemma von Zorn*, das äquivalent ist zu dem Auswahlaxiom.

Wir stellen uns Mengen als einen Sack vor und ihre Elemente als Gegenstände darin. Eine Menge, die als Element in einer anderen Menge enthalten ist, könnte man sich entsprechend als Sack in einem größeren Sack vorstellen.

Beispiel 4.1. (i) Die Menge der Studierenden, die diesen Vorkurs im SoSe 2021 besuchen.

(ii) Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.

(iii) Die Menge aller Primzahlen.

(iv) Die Menge aller Geraden in der Ebene.

Aufgabe 4.2. Bezeichne P die Menge der Primzahlen. Welche Elementbeziehungen gelten?

(i) $2 \in P$; (ii) $6 \in P$; (iii) $101 \in P$; (iv) $\{2, 101\} \in P$.

Um über Mengen zu sprechen müssen wir erklären, wie wir sie festlegen können. Ganz naiv gedacht geht das z.B. auf zwei Weisen:

(i) Durch **Aufzählen**: Alle Elemente einer *endlichen* Menge (gemeint: eine Menge mit n Elementen für $n \in \mathbb{N}$) können wir angeben indem wir sie aufzählen, z.B. definieren wir die Menge, die nur die Elemente 🐱, ▭, 😎 enthält, als

$$M := \{\text{🐱}, \text{▭}, \text{😎}\}.$$

Die Reihenfolge der Auflistung soll dabei keine Rolle spielen und dasselbe Objekt taucht nur einmal auf, d.h. z.B.

$$\{\text{🐱}, \text{▭}, \text{😎}\} = \{\text{▭}, \text{😎}, \text{🐱}\} = \{\text{▭}, \text{▭}, \text{🐱}, \text{▭}, \text{😎}\}.$$

Wir benutzen zur Notation von Mengen geschweifte Klammern.

(ii) Durch **Angabe einer Auswahleigenschaft:** Wir können Mengen beschreiben, indem wir Eigenschaften ihrer Elemente angeben. So lassen sich auch *unendliche* Mengen einfach beschreiben, z.B. die Menge aller Primzahlen, die wir beschreiben als Menge von natürlichen Zahlen, die nur triviale Teiler besitzt. Wir notieren das als

$$P := \{p \in \mathbb{N} \mid p > 1 \text{ und } p \text{ besitzt nur die Teiler } \pm 1 \text{ und } \pm p\}.$$

Bemerke, dass der senkrechte Strich | in der Mengenbeschreibung zu lesen ist als "für die gilt". Alternativ wird hierfür auch ein Doppelpunkt verwendet.

Können wir so nun *alle* Mengen beschreiben? Leider nicht, denn mit diesen Ansätzen können wir z.B. nicht die natürlichen Zahlen darstellen. Wir könnten den "Aufzähl-Ansatz" von oben naiv fortsetzen und schreiben

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \ldots\},$$

weil wir wissen "wie es weitergeht". Wir können diese Idee etwas präziser machen. Das haben wir schon in Abschnitt 3 durch die Beschreibung durch die **Peano-Axiome** gesehen. Man bemerke, dass man die *Existenz* der natürlichen Zahlen in dieser axiomatischen Beschreibung immer noch voraussetzen muss. Eine Konstruktion lässt sich auf Basis der ZF-Axiome angeben, aus welchen sich auch die Peano-Axiome folgern lassen. Wir bemerken ferner, dass wir auch noch keine "Darstellung" der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ oder der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ kennen. Diese konstruiert man aus $\mathbb{N}$, was ihr in der Analysis 1 lernen werdet.

Beispiel 4.3. Die Menge M, deren Elemente die Zahlen $1, 2$ und 3 sind, können wir also auf zwei Weisen beschreiben:

(i) Durch Auflistung: $M = \{1, 2, 3\}$;

(ii) Durch Angabe einer Auswahleigenschaft: $M = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 3\}$.

Aufgabe 4.4. Finde eine Beschreibung für die Menge der geraden Zahlen.

Hier vielleicht das wichtigste Beispiel einer Menge:

Definition 4.5 (Leere Menge)**.** Die Menge, die keine Elemente enthält, nennen wir *leere Menge*. Ihr Symbol ist gegeben durch $\emptyset$. Formal kann dies ausgedrückt werden als

$$\emptyset := \{x \mid x \neq x\}.$$

Bemerke, dass mitunter auch das Symbol $\{\,\}$ genutzt wird (eher unüblich).

Bemerkung 4.6. Die Existenz der Leeren Mengen ist in der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre axiomatisch festgelegt.

Definition 4.7 (Teilmengen und Mengengleichheit)**.** Es seien M, N zwei Mengen.

(i) Wir sagen N ist *Teilmenge* von M, wenn für jedes $x \in N$ folgt, dass auch $x \in M$ gilt. Das Symbol für Teilmenge ist definiert durch

$$N \subseteq M \;:\Leftrightarrow\; [x \in N \Rightarrow x \in M].$$

(ii) Wir sagen N und M sind *gleich*, wenn sowohl $N \subseteq M$ als auch $M \subseteq N$ gilt, d.h.

$$N = M \;:\Leftrightarrow\; [N \subseteq M \;\wedge\; M \subseteq N].$$

Ferner schreiben wir $M \neq N$, wenn M und N nicht gleich sind. Eine Menge M heißt *nichtleer*, wenn $M \neq \emptyset$ gilt.

Bemerkung 4.8. Aufgrund der Definition von Gleichheit von Mengen folgt, dass Objekte, die in einer Menge aufgelistet sind, nicht mehrfach auflisten, es gilt also $\{a, a, a, a \ldots\} = \{a\}$. Ferner ist auch die Reihenfolge der Auflistung egal, es gilt also $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Um auszudrücken, dass $N \subseteq M$ und $N \neq M$, schreiben wir auch $N \subsetneq M$ und sprechen von einer *echten Teilmenge*. Leider gibt es unterschiedliche Konventionen: Manche Autor:innen benutzen $\subset$ für eine Teilmengenbeziehung, andere behalten sich dieses Symbol für echte Inklusionen vor.

Visualisierung

Aussagen über Mengen sollte man immer versuchen zu visualisieren. Teilmengen der reellen Zahlen lassen sich z.B. auf einem Zahlenstrahl darstellen, Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ (wie z.B. ein Funktionsgraph) kann man sich in ein Koordinatensystem einzeichnen. Manchmal sind aber auch symbolische Darstellungen sehr hilfreich, z.B. wenn es um Aussagen um allgemeine Mengen geht. Hierzu eignet sich die Darstellung als Venn-Diagramm.

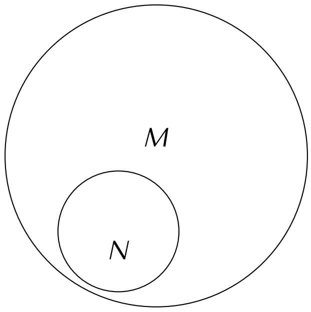


Abbildung 1: Die Mengeninklusion $N \subseteq M$ als Venn-Diagram dargestellt

Beispiel 4.9. (i) Eine Menge M besitzt immer mindestens zwei Teilmengen: $\emptyset$ und sich selbst. Man nennt diese deshalb auch die *trivialen Teilmengen* von M.

(ii) Es gilt $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

(iii) Alle Teilmengen von $\{1, 2, 3\}$ sind

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}.$$

(iv) In der Analysis brauchen wir spezielle Teilmengen der reellen Zahlen. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ setzen wir

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\},$$

genannt das *abgeschlossene Intervall* von a bis b,

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$

genannt das *offene Intervall* von a bis b. Wir definieren außerdem **halboffene Intervalle** als

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\},$$

bzw.

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}.$$

Lassen wir jeweils eine der Schranken weg, d.h. kann x "beliebig klein" bzw. "beliebig groß" werden, schreiben wir auch $(-\infty, b]$ oder $[a, \infty)$.

Seien M, N Mengen. Eine **Mengeninklusion** $N \subseteq M$ ist eine neue Formulierung bereits eingeführter Typen von Aussgen, nämlich

$$\forall x \in N : x \in M.$$

Das bedeutet wir müssen für ein (beliebiges) Element x zeigen:

$$x \in N \Rightarrow x \in M.$$

Sind nun die Elemente von M charakterisiert durch eine Eigenschaft, dann muss also gezeigt werden: ein solches x erfüllt auch diese Eigenschaft.

Eine **Mengengleichheit** $N = M$ ist im Wesentlichen eine Äquivalenzaussage. Wir müssen zeigen:

$$x \in N \Leftrightarrow x \in M.$$

Deshalb hat der Beweis auch wieder zwei Teile. Wir zeigen die beiden Mengeninklusionen $N \subseteq M$ und $M \subseteq N$.

Um die **Ungleichheit** von Mengen N, M zu zeigen, reicht es, ein Element zu finden, das dies bezeugt, d.h. entweder ein $x \in M$ mit $x \notin N$ oder ein $x \in N$ mit $x \notin M$.

Wir wollen den oben genannten "Beschreibungsansatz" von Mengen jetzt auch formal definieren.

Es sei X eine Menge. Ist $A(\cdot)$ eine gegebene Aussageform auf X, so existiert eine Menge

$$\{x \in X \mid A(x)\},$$

die diejenigen $x \in X$ enthält, für die $A(x)$ wahr ist. Ist die Aussage $A(y)$ wahr für ein $y \in X$, so schreiben wir insbesondere $y \in \{x \in X \mid A(x)\}$ und andernfalls schreiben wir $y \notin \{x \in X \mid A(x)\}$. Das Enthalten- bzw. Nicht-Enthalten-Sein in einer solchen Menge besteht also darin, zu zeigen bzw. widerlegen, dass $A(y)$ gilt.

Die Menge X wird auch als *Grundmenge* für A bezeichnet und es gilt

$$\{x \in X \mid A(x)\} \subseteq X.$$

Aufgabe 4.10. Gib eine Beschreibung der Teilemenge der durch 3 teilbaren geraden Zahlen (siehe Aufgabe 4.4). Beweise anschließend die Mengengleichheit mit

$$S := \{n \in \mathbb{Z} \mid 6 \mid n\}.$$

Ähnlich wie die Menge der Elemente der Elemente einer Menge, gibt es auch eine Menge, die der Teilmengen einer Menge, genannt die **Potenzmenge.**

Definition 4.11 (Potenzmengenaxiom)**.** Sei M eine Menge. Die *Potenzmenge* von M, notiert als $\mathcal{P}(M)$, ist die Menge, die alle Teilmengen von M als Elemente enthält.

Bemerkung 4.12. Die Existenz und Eindeutigkeit der Potenzmenge ist durch die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre sichergestellt.

Beispiel 4.13. Ist $M = \{a, b\}$, so ist $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, M\}$.

4.2 Mengenoperationen

Definition 4.14 (Vereinigung)**.** Seien M, N zwei Mengen. Wir setzen

$$M \cup N := \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$$

als die *Vereinigung von M und N* und lesen $M \cup N$ auch als "M vereinigt N".

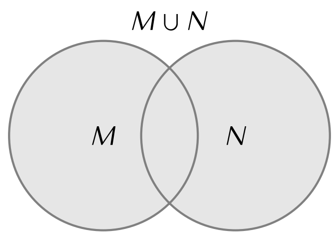


Abbildung 2: Vereinigung als Venn-Diagramm

Bemerkung 4.15. Implizit benötigen wir in der Definition der Vereinigung eine **Universalmenge**, die M und N als Teilmengen enthält. Die Existenz davon ist innerhalb der ZF-Axiome axiomatisch gewährleistet.

Es gelten bestimmte Rechenregeln für die Vereinigung. Genauer gilt

(i) **Kommutativität:** Für Mengen N, M gilt $N \cup M = M \cup N$.

(ii) **Assoziativität:** Für alle Mengen A, B, C gilt

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

Diese Eigenschaften folgen unmittelbar aus der Definition der Vereinigung bzw. der Assoziativität der logischen Verknüpfung $\vee$.

Aufgabe 4.16. Seien M, N zwei Mengen. Angenommen $N \subseteq M$. Was können wir über $M \cup N$ sagen?

Beispiel 4.17. (i) $M \cup \emptyset = M$;

(ii) $\{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\}$;

(iii) $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$;

(iv) Seien $A(\cdot)$ und $B(\cdot)$ Aussageformen auf einer Menge X und $M_A := \{x \in X \mid A(x)\}$ und $M_B := \{x \in X \mid B(x)\}$. Dann gilt

$$M_A \cup M_B = \{x \in X \mid A(x) \vee B(x)\}.$$

(v) $[1, 2] \cup [2, 3] = [1, 3]$.

Sei zunächst $I = \{1, \dots, n\}$. Für alle $i \in I$ seien A_i Mengen. Die Vereinigung von $A_1, \dots, A_n$ definieren wir als

$$\begin{aligned} A_1 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i &= \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n\} \\ &= \{x \mid \exists i \in \{1, \dots, n\} : x \in A_i\}. \end{aligned}$$

Für beliebige Indexmenge I definieren wir die Vereinigung aller A_i mit $i \in I$ als

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\}.$$

In Worten: Wir betrachten alle x, die in mindestens einer der Mengen A_i liegen.

Bemerke, dass in diese Definition implizit die Kommutativität und Assoziativität der Vereinigung eingeht.

Aufgabe 4.18. Beschreibe die Menge

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \{-n, n\}.$$

Lemma 4.19. *Seien M, N Mengen. Dann gilt*

$$(i) \quad M \subseteq M \cup N \quad \textit{und} \quad (ii) \quad N \subseteq M \cup N.$$

Beweis. (i) Sei $x \in M$ beliebig. Per Definition gilt $M \cup N = \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$. Damit erfüllt $x \in M$ die Bedingung aus der Bescheibung von $M \cup N$. Das bedeutet nichts anderes als $x \in M \cup N$. (ii) funktioniert analog. □

In Beweisen werden manchmal Formulierungen wie "Der zweite Fall funktioniert **analog**" benutzt. Damit ist gemeint: Die gleiche Argumentation, die wir im Beweis von Aussage 1 benutzt haben, funktioniert auch, um Aussage 2 zu beweisen. Statt den gleichen Beweis mit anders benannten Objekten und etwas anderen Voraussetzungen nochmal aufzuschreiben, wird dies den Leser:innen überlassen (und sollte von der geneigten Leser:in auch immer nochmal selbst verifiziert werden).

Definition 4.20 (Schnitt)**.** Seien N, M Mengen. Wir setzen

$$M \cap N := \{x \in M \cup N \mid x \in M \wedge x \in N\}$$

als die *Schnittmenge von M und N* und lesen $M \cap N$ auch als "M geschnitten N". Wir nennen M und N *disjunkt*, wenn $M \cap N = \emptyset$ gilt.

Es gelten bestimmte Rechenregeln für den Schnitt. Genauer gilt

(i) **Kommutativität:** Für Mengen N, M gilt $N \cap M = M \cap N$.

(ii) **Assoziativität:** Für alle Mengen A, B, C gilt

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Diese Eigenschaften folgen unmittelbar aus der Definition der Vereinigung bzw. der Assoziativität der logischen Verknüpfung $\wedge$.

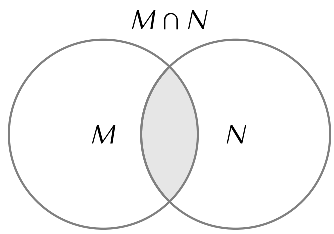


Abbildung 3: Schnitt als Venn-Diagramm

Aufgabe 4.21. Seien M, N zwei Mengen. Angenommen $N \subseteq M$. Was können wir über $M \cap N$ sagen?

Beispiel 4.22. (i) $M \cap \emptyset = \emptyset$;

(ii) $\{1\} \cap \{2\} = \emptyset$;

(iii) $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$.

(iv) $\mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\} = \mathbb{N}$;

(v) Sei P die Menge aller Primzahlen und E die Menge aller geraden Zahlen.
Dann ist $E \cap P = \{2\}$;

(vi) Seien $A(\cdot)$ und $B(\cdot)$ Aussageformen auf einer Menge X und $M_A := \{x \in X \mid A(x)\}$ und $M_B := \{x \in X \mid B(x)\}$. Dann gilt

$$M_A \cap M_B = \{x \in X \mid A(x) \wedge B(x)\};$$

(vii) $[1, 2] \cap [2, 3] = \{2\}$.

Aufgabe 4.23. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$. Zeige, dass die offenen Intervalle (a, b) und (c, d) genau dann disjunkt sind, wenn $b < c$ oder $d < a$.

Sei zunächst $I = \{1, \ldots, n\}$. Für alle $i \in I$ seien A_i Mengen. Den Schnitt von $A_1, \ldots, A_n$ definieren wir als

$$\begin{aligned} A_1 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i &= \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n\} \\ &= \{x \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\} : x \in A_i\}. \end{aligned}$$

Für beliebige Indexmenge I definieren wir den Schnitt aller A_i mit $i \in I$ als

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I : x \in A_i\}.$$

In Worten: Wir betrachten alle x, die in allen Mengen A_i liegen.

Bemerke, dass in diese Definition implizit die Kommutativität und Assoziativität des Schnittes eingeht.

Aufgabe 4.24. Bestimme den Schnitt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{1, \ldots, n\}.$$

Lemma 4.25. *Seien M, N Mengen. Dann gilt*

$$(i) \quad M \cap N \subseteq M \quad \textit{und} \quad (ii) \quad M \cap N \subseteq N.$$

Aufgabe 4.26. Schreibe deinen eigenen Beweis von Lemma 4.25.

Satz 4.27 (Distributivität von Vereinigung und Schnitt)**.** *Seien A, B, C Mengen. Dann gelten Distributivgesetze, d.h.*

(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

(ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Aufgabe 4.28. Male Venn-Diagramme, um dir diese Aussagen klar zu machen.

Venn-Diagramme sind sehr nützlich, um sich einen Überblick zu schaffen. Einige Behauptungen aus diesem Abschnitt wirken damit so offensichtlich, dass man einen Beweis schon fast für überflüssig hält. Venn-Diagramme können aber einen Beweis nicht ersetzen. Die unmittelbar gewonne Einsicht muss noch formalisiert werden und in eine Form gebracht werden, die kommuniziert werden kann. Die Erkenntnisse aus Betrachtung von Venn-Diagrammen können hier helfen.

Warum formale Beweise doch wichtig sind sieht man z.B. auch, wenn man statt Aussagen über zwei oder drei Mengen, Aussagen über n Mengen anschaut. Wenn n groß ist, dann kann man die Aussage nicht mehr gut veranschaulichen. Ein formales Argument lässt sich hingegen in der Regel verallgemeinern.

Beweis von Satz 4.27. Wir zeigen beispielhaft die Aussage: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Eigentlich müssen wir immer zwei Inklusionen zeigen. Hier können wir uns Arbeit sparen, indem wir nutzen, dass folgendes Äquivalenzumformungen sind:

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \qquad (*) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

□

Aufgabe 4.29. Im (Teil-)beweis von Satz 4.27 haben wir für fast alle Äquivalenzen nur Definitionen angewandt. In der mit $(*)$ markierten Zeile nutzen wir aber eine aussagenlogische Behauptung, die wir zuvor noch nicht bewiesen haben. Formuliere diese Behauptung als Lemma gib einen Beweis dafür an.

Definition 4.30 (Differenzmenge)**.** Es seien M, N Mengen. Wir setzen

$$M \setminus N := \{x \in M \mid x \notin N\},$$

gelesen "M ohne N", für die *Differenzenmenge von M und N*. Manchmal wird auch die Notation $M - N$ benutzt. Ist speziell $N \subseteq M$ so bezeichnen wir

$$N^c := M \setminus N = \{x \in M \mid x \notin N\}.$$

auch als das *Komplement von N in M*.

Bemerkung 4.31. Bemerke, dass man das Komplement M^c einer Menge M nur bilden kann, wenn wir M als Teilmenge einer anderen Mengen/Universalmenge auffassen.

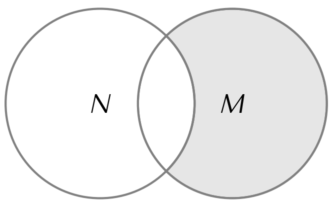


Abbildung 4: Differenzmenge als Venn-Diagramm

Beispiel 4.32. (i) Sei M eine Menge. Dann gilt $M \setminus \emptyset = M$ und $\emptyset \setminus M = \emptyset$;

(ii) Ist $M \cap N = \emptyset$, so gilt $M \setminus N = M$;

(iii) $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3\} = \{1\}$;

(iv) $\{2, 3\} \setminus \{1, 2, 3\} = \emptyset$, d.h. für Mengen N, M gilt im Allgemeinen nicht $N \setminus M = N \setminus M$;

(v) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0 = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$;

(vi) Seien $A(\cdot)$ Aussageformen auf einer Menge X und $M_A := \{x \in X \mid A(x)\} \subseteq X$. Dann gilt

$$M_A^c = \{x \in X \mid \neg A(x)\}.$$

Seien $A(\cdot)$ und $B(\cdot)$ Aussageformen auf einer Menge X und $M_A := \{x \in X \mid A(x)\}$ und $M_B := \{x \in X \mid B(x)\}$. Wir haben gewisse Operationen jeweils für Aussagen und für Mengen definiert. Hier eine kleine Übersicht zum Zusammenhang:

Mengenlehre	Logik
$M_A \subseteq M_B$	$\forall x \in X : A(x) \Rightarrow B(x)$
$M_A = M_B$	$\forall x \in X : A(x) \Leftrightarrow B(x)$
$x \in M_A$	Für x gilt $A(x)$
$x \in M_A \cup M_B$	Für x gilt $A(x) \vee B(x)$
$x \in M_A \cap M_B$	Für x gilt $A(x) \wedge B(x)$
$x \in M_A^c$	Für x gilt $\neg A(x)$

Entsprechend lassen sich auch "Rechenregeln" aus der Aussagenlogik in Rechenregeln für Mengenoperationen übersetzen und umgekehrt.

Trotzdem ganz wichtig: Auch wenn z.T. die gleichen Bezeichnungen für Mengen und Aussagen verwendet werden, muss man klar zwischen ihnen unterscheiden, da es sich um ganz verschiedene Arten von mathematischen Objekten handelt. Es ergibt zum Beispiel keinen Sinn für eine Aussage A etwas zu schreiben wie $x \in A$ oder für Mengen B, C zu schreiben $B \wedge C$ oder $B \Rightarrow C$.

Lemma 4.33. *Es sei M eine Menge, $A, B \subseteq M$ (d.h. $A \subseteq M$, $B \subseteq M$), dann gilt*

(i) $A \cup A^c = M$ *und* $A \cap A^c = \emptyset$*;*

(ii) $A = (A^c)^c$*;*

(iii) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$*;*

(iv) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$*.*

Aufgabe 4.34. Überlege dir, zu welchen Rechengesetzen von logischen Verknüpfungen die Aussagen in diesem Satz korrespondieren.

Beweis. (i): Für den ersten Teil müssen zwei Mengeninklusionen gezeigt werden: $A \cup A^c \subseteq M$ und $A \cup A^c \supseteq M$.

"$\subseteq$" Es gilt $A \subseteq M$ und per Definition auch $A^c \subseteq M$. Es folgt, dass $A \cup A^c \subseteq M$.

"$\supseteq$" Es sei $x \in M$. Ist $x \in A$, dann folgt $x \in A \cup A^c$. Ist andernfalls $x \notin A$, dann ist per Definition $x \in A^c$ und damit $x \in A \cup A^c$. Da x beliebig gewählt war, folgt, dass $M \subseteq A \cup A^c$ ist.

Für den zweiten Teil von (i) nehmen wir an, es gäbe $x \in A \cap A^c$. Dann folgt insbesondere $x \in A^c$ und $x \in A$, d.h. $x \notin A$ und $x \in A$. Das ist aber ein Widerspruch.

(ii) - (iv) sind Übungen. □

Da innerhalb einer Menge, die Reihenfolge der aufgelisteten Objekte nicht festgelegt ist, in der Mathematik es aber oftmals auf die Reihenfolge ankommt, verwenden wir als eine Art Hilfsmittel daher die*Tupel*-Schreibweise und das kartesische Produkt.

Definition 4.35 (Kartesisches Produkt)**.** Sind N, M Mengen, so setzen wir

$$M \times N := \{(m, n) \mid m \in M,\ \ n \in N\}$$

und bezeichnen diese Menge als das *kartesische Produkt zwischen* M *und* N. Elemente von $M \times N$ heißen auch *Tupel*. Sind $(a, b), (c, d) \in M \times N$, so gilt

$$(a, b) = (c, d) \ :\Leftrightarrow\ (a = c) \wedge (b = d)$$

sowie, für Mengen A, B,

$$A \times B \subseteq M \times N \ :\Leftrightarrow\ A \subseteq M \wedge B \subseteq N.$$

Bemerkung 4.36. Ist z.B. $M = \{1, 2\}$ so gilt auch in $M \times M$, dass $(1, 2) \neq (2, 1)$ ist!

Beispiel 4.37. (i) Sei M eine Menge. Dann ist $M \times \emptyset = \emptyset \times M = \emptyset$.

(ii) Sei $N = \{a, b\}$ und $M = \{1, 2, 3\}$. Dann gilt:

$$N \times M = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}.$$

(iii) Ist $M = N = \mathbb{R}$, so ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nichts anderes als die mengentheoretische Beschreibung der *Euklidischen Ebene*, welche besteht aus geordneten Paaren reeller Zahlen, d.h.

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

5 Die komplexen Zahlen

Es ist ein bekanntes Problem, dass die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ in den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ keine Lösung besitzt. Wir führen die imaginäre Einheit i ein, die die Eigenschaft

$$i^2 = -1$$

erfüllt. Fügen wir i und alle damit entstehenden Linearkombinationen zu den reellen Zahlen hinzu, so erhalten wir die Menge der **komplexen Zahlen**:

$$\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Per Definition lässt sich in $\mathbb{C}$ nun die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ lösen. Sie hat die beiden Lösungen i und $-i$. Es gilt noch mehr: In den komplexen Zahlen hat sogar jedes nicht-konstante Polynom eine Nullstelle. Dieses Resultat nennt sich der **Fundamentalsatz der Algebra**. Wir sind an dieser Stelle von einem Beweis dieses Satzes noch weit erfernt und widmen uns erstmal der grundlegenden Struktur der komplexen Zahlen.

Die Addition und Multiplikation, die wir aus den reellen Zahlen kennen, können wir auf $\mathbb{C}$ wie folgt fortsetzen: Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ zwei komplexe Zahlen, d.h. der Form $z_1 = a + ib$ und $z_2 = c + id$ für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= a + ib + c + id = (a + c) + i(b + d), \\ z_1 \cdot z_2 &= (a + ib)(c + id) = ac + i^2 bd + i(bc + ad) = ac - bd + i(bc + ad). \end{aligned}$$

Bemerke, dass damit $z_1 + z_2$ und $z_1 \cdot z_2$ per Definition komplexe Zahlen sind.

Definition 5.1. Es sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

(i) Wir bezeichnen a als den *Realteil* von z und notieren dies auch als $\mathrm{Re}(z) := a$.

(ii) Wir bezeichnen b als den *Imaginärteil* von z und notieren dies als $\mathrm{Im}(z) := b$.

(iii) Wir setzen $|z| := \left(a^2 + b^2\right)^{1/2}$ als den *Betrag von z*.

(iv) Wir setzen $\overline{z} := a - ib$ als *die zu z komplex konjugierte Zahl*.

Bemerkung 5.2. Insbesondere die Addition gibt uns die Möglichkeit $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ zu identifizieren, wie wir in Abbildung 5 sehen können. Wir können in der Ebene $\mathbb{R}^2$ Realteil und Imaginärteil als x- und y- Koordinate auffassen. Der Betrag beschreibt gerade die Länge dieses Vektors und die komplexe Konjugation entspricht Spiegelung an der x-Achse.

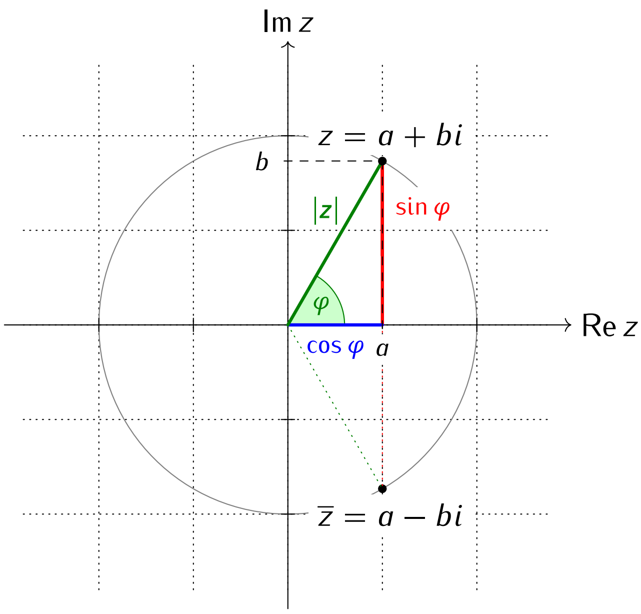


Abbildung 5: Die komplexe Ebene

In der folgenden Aufgabe sollen einige Eigenschaften der komplexen Konjugation nachgerechnet werden.

Aufgabe 5.3. Zeige die folgenden Identitäten für komplexe Zahlen $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(i) $\overline{\overline{z}} = z$;

(ii) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;

(iii) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;

Nun aber ein paar Beispiele.

Beispiel 5.4. (i) Betrachte $z = i$, dann ist $\mathrm{Re}(i) = 0$, $\mathrm{Im}(i) = 1$ und $|i| = \left(0^2 + 1^2\right)^{1/2} = 1$. Außerdem ist $\overline{i} = -i$

(ii) Betrachte $z = 1 + i$, dann ist $\mathrm{Re}(1 + i) = 1$, $\mathrm{Im}(1 + i) = 1$, $|1 + i| = \left(1^2 + 1^2\right)^{1/2} = \sqrt{2}$ und $\overline{1 + i} = 1 - i$.

Aufgabe 5.5. Gib Real- und Imaginärteil, komplexe Konjugation und Betrag den folgenden komplexen Zahlen an:

$$z_1 = 3 + 2i; \quad z_2 = \frac{1 - 4i}{2}; \quad z_3 = -5; \quad z_4 = -i.$$

Wir bemerken, dass durch die Setzung $i^2 = -1$ wir eine Multiplikation haben, doch was ist z.B. mit $\frac{1+i}{i}$? Aufgrund der gegebenen Definition der komplexen Zahlen ist es nicht klar, dass es sich wieder um eine komplexe Zahl handelt. Wir müssen uns überlegen, warum wir sinnvollerweise durch komplexe Zahlen (ungleich null) teilen dürfen. Zur Hilfe das folgende Lemma.

Lemma 5.6. *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $z\overline{z} = |z|^2 \in [0, \infty)$.*

Beweis. Sei $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, dann ist

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2 b^2 + i(ab - ba) = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

□

Auf diese Art lassen sich zwei komplexe Zahlen einfach teilen in dem wir einen Bruch mit dem komplex konjugierten Nenner erweitern: Es gilt beispielsweise

$$\frac{1 + i}{i} = \frac{(1 + i)(-i)}{i(-i)} = -i - i^2 = 1 - i$$

und

$$\frac{i}{i + 1} = \frac{i(-i + 1)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Allgemein gilt: Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_2 \neq 0$, dann ist

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

Aufgabe 5.7. Berechne für die in Aufgabe 5.5 definierten komplexen Zahlen die Werte $z_i + z_j, z_i - z_j, z_i z_j$ und z_i / z_j für $i, j = 1, \ldots, 4$. Stelle das Resultat jeweils in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar.

Bisher haben wir eine komplexe Zahl als x- und y-Koordinate in der Ebene $\mathbb{R}^2$ aufgefasst und die Addition entspricht der Vektoradditon, lässt sich also gut graphisch darstellen. Was ist mit der Multiplikation?

Dazu werfen wir nochmal einen Blick auf Abbildung 5, wo wir eine komplexe Zahl $z = a + bi$ in die Ebene eingezeichnet haben. Diese Zahl wird nicht nur durch ihren Real- und Imaginärteil a bzw. b eindeutig in der Ebene festgelegt, sondern auch durch den Abstand zum Ursprung $|z|$ und einen Winkel φ (den Winkel zur positiven x-Achse). Aus der Trigonometrie ergibt sich $\cos(\varphi) = \frac{a}{|z|}$ und $\sin(\varphi) = \frac{b}{|z|}$ oder anders ausgedrückt

$$|z|(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z) = z, \tag{1}$$

wobei $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Wir nehmen an dieser Stelle die **Eulersche Formel** vorweg, welche einen Zusammenhang zwischen den trigonometrischen Funktionen und der komplexen Exponentialfunktion über die komplexer Zahlen beschreibt.

Satz 5.8. *(Eulersche Formel) Für alle $\varphi \in (-\pi, \pi]$ gilt*

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi).$$

Einen Beweis werdet ihr in der Vorlesung Analysis 1 zu sehen bekommen. Für $\varphi = \pi$ erhalten wir die bekannte **Eulersche Identität**

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

welche einen Zusammenhang verschiedener wichtiger mathematischer Konstanten angibt, nämlich der eulerschen Zahl e, der Kreiszahl π, der komplexen Einheit i, der reellen (multiplikativen) Einheit 1 und der Null. Der Physiker Richard Feynman hat diese Gleichung deshalb wohl auch als bemerkenswerteste Formel der Mathematik bezeichnet.

Diese Überlegungen führen insbesondere zu einer weiteren Darstellung komplexer Zahlen in sogenannten **Polarkoordinaten**. Auf diese wollen wir an dieser Stelle aber nicht genauer eingehen. Jedoch wollen wir noch feststellen, dass wir durch diesen Blickwinkel die Multiplikation einfacher graphisch intepretieren können. Beachte: Sind $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit

$$z_1 = |z_1|e^{i\varphi_1} \quad \text{und} \quad z_2 = |z_2|e^{i\varphi_2},$$

dann ist

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|e^{i\varphi_1} \cdot |z_2|e^{i\varphi_2} = |z_1| \cdot |z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Aufgabe 5.9. Die obige Rechnung zeigt, dass Multiplikation in $\mathbb{C}$ also für eine Addition der Winkel, d.h. eine Drehung, steht. Stelle diese Erkenntnis graphisch dar.

6 Abbildungen

6.1 Definition und Beispiele

Definition 6.1 (Abbildung)**.** Seien X, Y Mengen. Eine *Abbildung* ist eine Zuordnung, die jedem $x \in X$ genau ein $f(x) = y \in Y$ zuordnet. Für Abbildungen schreiben wir

$$\begin{aligned} f \colon X &\to Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

oder $f : X \to Y$, $x \mapsto y$.

Sei $f \colon X \to Y$ eine Abbildung. Mit dem Symbol

$$x \mapsto f(x)$$

beschreiben wir die **Abbildungsvorschrift** von f, d.h. wir drücken aus, dass wir einem Element $x \in X$ ein Element in Y, bezeichnet mit $f(x)$, zuordnen. Wir lesen obiges Symbol z.B. als "x wird abgebildet auf $f(x)$" oder "x geht auf $f(x)$".

Wir nennen $y := f(x)$ den **Wert** bzw. das **Bild** von f an der Stelle x und x ein **Urbild** von y unter f. Ferner bezeichnen wir X auch als **Definitionsbereich bzw. -menge (von f)** und Y als **Zielbereich bzw. -menge (von f)**. Um eine Abbildung festzulegen muss Definitions- und Zielbereich angegeben werden. Es reicht nicht nur die Abbildungsvorschrift anzugeben: grundlegenden Eigenschaften von Abbildungen hängen von Definitions- und Zielbereich ab.

Was eine Abbildung ist, ist einer der grundlegendsten und zentralsten Begriffe der (modernen) Mathematik. Es ist deshalb sehr wichtig, dass wir den abstrakten Abbildungsbegriff verstehen und eine Intuition dafür bekommen. Ihr könnt euch schon denken, wie wir diese am besten bekommen: Viele Beispiele und Gegenbeispiele. Zunächst mal ein “nicht so mathematisches” Beispiel. Jeder Katze 🐱 können wir ein Alter (sagen wir in Jahren, also abgerundet) zuordnen. Die Zuordnung ist eindeutig: Eine Katze kann nicht zwei verschiedene Alter haben. Wir haben also eine Abbildung

$$\begin{aligned} \{\text{Katzen in Frankfurt}\} &\to \mathbb{N}_0 \\ 🐱 &\mapsto (\text{Alter von } 🐱). \end{aligned}$$

Versuchen wir andersherum jeder natürlichen Zahl eine Katze zuzuordnen, die dieses Alter hat, dann kann diese Zordnung nicht mehr eindeutig sein: Manchen Zahlen wird man gar keine Katze zuordnen können, da diese leider nicht beliebig alt werden, und anderer Zahlen kann man mehrere Katzen zuordnen (so hat die Autorin z.B. zwei Katzen zuhause, die beide ein Jahr alt sind).

Pfeildiagramme

Abbildungen endlicher Mengen X, Y lassen sich als Pfeildiagramme darstellen. Wir repräsentieren die Elemente von X und Y jeweils als Punkte, die Zuordnung eines Elements $x \in X$ zu einem Element $y = f(x) \in Y$ repräsentieren wir durch einen Pfeil zwischen den Punkten. Diese Bilder helfen dabei, bestimmte Eigenschaften von Abbildungen (z.B. Injektivität, Surjektivität, Bijektivität) zu visualieren.

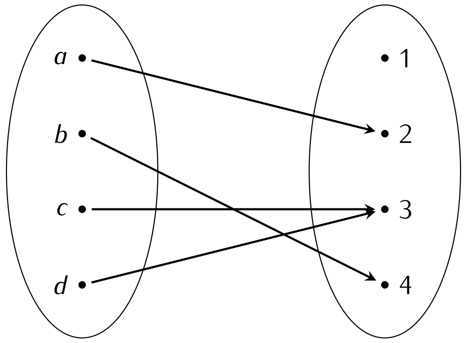


Abbildung 6: Pfeildiagramm der Abbildung $f\colon \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ mit $a \mapsto 2$, $b \mapsto 4$, $c \mapsto 3$, $d \mapsto 3$

Beispiel 6.2. (i) Das einfachste Beispiel: Sei X eine Menge. Dann definiert

$$f\colon X \to X, x \mapsto x$$

eine Abbildung, genannt die **Identitätsabbildung**. Wir schreiben auch $f = \mathrm{id}$.

(ii) Alles, was du aus der Schule als Funktion kennst, ist eine Abbildung solange du Definitions- und Zielbereich (richtig) angibst, z.B.

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 1$;

(b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$;

(c) Wir können (a) und (b) unter dem Begriff **Polynomfunktion** zusammenfassen. Genauer können wir das folgendermaßen definieren:

Definition 6.3 (Polynomfunktion)**.** Eine *Polynomfunktion* auf $\mathbb{R}$ ist eine Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass es $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n, \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Man beachte hier die Reihenfolge der Quantoren. Die Koeffizienten a_i hängen nicht von x ab.

(d) Bezeichne für eine reelle Zahl r mit $r \geq 0$ (wir sagen auch: eine **nicht-negative** Zahl) mit $\sqrt{r}$ die nicht-negative Lösung der Gleichung $X^2 = r$. Dann ist

$$f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$$

eine Abbildung.

(e) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$;

(iii) Wir können eine Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch die Zuordnung

$$x \mapsto \begin{cases} -x & \text{wenn } x < 0 \\ x & \text{wenn } x \geq 0. \end{cases}$$

definieren. Dies wird übrigens auch **Betragsfunktion** genannt und die Abbildungsvorschrift als $f(x) = |x|$ geschrieben.

(iv) Hier weitere Beispiele, die nicht mehr so aussehen wie Funktionen, wie du sie aus der Schule kennst:

(a) Durch
$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto \tfrac{1}{n}$$
wird eine Abbildung definiert. Solche speziellen Abbildungen werdet ihr in der Analysis-Vorlesung als **Folgen** kennenlernen.

(b) Wir können eine Abbildung zwischen den Mengen $\{a, b, c, d\}$ und $\{1, 2, 3, 4\}$ angeben durch die Zuordnung
$$a \mapsto 2, b \mapsto 4, c \mapsto 3, d \mapsto 3.$$
Diese Abbildung ist in Abbildung 6 als Pfeildiagram dargestellt. Betrachte, dass es kein Problem darstellt, wenn ein Element der Zielmenge kein Urbild besitzt. Auch kein Problem ist, dass es Elemente im Bildbereich gibt (in diesem Fall 3), die mehr als ein Urbild haben. Das ist in der Definition einer Abbildung nicht gefordert (und ähnliches können wir bei obigen Beispiel (i) (b) beobachten). Ein Problem wäre allerdings, wenn ein Element des Definitionsbereich keinen oder mehr als zwei Werte zugeordnet bekommt.

(c) Durch
$$f\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, \quad (a, b) \mapsto \frac{a}{b}$$
ist eine Abbildung definiert.

Der Begriff der Abbildung ist von zentraler Bedeutung für die moderne Mathematik. Aber genauso wie die axiomatische Mengenlehre wurde dieser erst sehr spät formalisiert, nämlich im 20. Jahrhundert. Deshalb gibt es heute noch in verschiedenen Gebieten der Mathematik unterschiedliche gängige Bezeichnungen. Der Begriff **Abbildung** ist dabei selbst der allgemeinste.

Der Begriff **Funktion** ist eigentlich dazu synonym, wird aber vor allem in der Analysis verwendet, wo meistens $Y = \mathbb{R}$ oder ähnliche Einschränkungen gelten. Dieser Begriff ist aus der Schule bekannt, wo man nur ganz spezielle Arten von reellen Funktionen betrachtet hat.

Das hier eingeführte Konzept von Abbildungen ist sehr viel allgemeiner als das an Beispielen aufgebaute Konzept von Funktionen, das man aus der Schule kennt:

- Die Mengen X, Y müssen keine Teilmenge der reellen Zahlen sein.
- Dadurch lassen sich (Graphen von) Abbildungen im Allgemeinen nicht wie gewohnt in ein Koordinatensystem einzeichnen.
- Die Abbildungsvorschrift $f(x) = \dots$ muss nicht unbedingt "in einer geschlossenen Formel" in Abhängigkeit von x gegeben sein.

Wir müssen nochmal über die Definition einer Abbildung sprechen: Eigentlich ist die obige Definition nämlich ziemlich ungenau. An keiner Stelle haben wir definiert, was eigentlich eine Zuordnung ist. Das ist aber nicht so schlimm, da unsere Intuition zu diesem Begriff genau trifft, was gemeint ist. Es gibt aber natürlich auch eine genaue mengentheoretische Beschreibung. Dazu fassen wir ein Element aus der Definitionsmenge $x \in X$ und dessen Wert $f(x)$ als geordnetes Paar auf. Dies definiert eine Teilmenge der Produktmenge $X \times Y$, genannt **Graph** von f. Dadurch ist f schon eindeutig beschrieben. Genauer erhalten wir die folgende Definition:

Definition 6.4 (Abbildung – Mengentheoretische Beschreibung)**.** Eine *Abbildung* ist ein Tripel $f = (X, Y, G)$ bestehend aus einer Menge X, genannt Definitionsbereich, einer Menge Y, genannt Zielbereich und einer Teilmenge G des Produkts $X \times Y$ mit den Eigenschaften

(i) $\forall x \in X : \exists y \in Y : (x, y) \in G$;

(ii) $\forall x \in X : \forall y_1, y_2 \in Y : (x, y_1) \in G \wedge (x, y_2) \in G \Rightarrow y_1 = y_2$.

Die Menge G nennen wir den *Graphen* von f. Wir nuzten dafür die folgende Notation:

$$\operatorname{Graph} f := \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\} \subseteq X \times Y.$$

Bemerkung 6.5. Sind X, Y Teilmengen der reellen Zahlen, so ist

$$\operatorname{Graph} f \subseteq \mathbb{R}^2$$

und lässt sich wie aus der Schule gewohnt als "Kurve" in die Euklidische Ebene einzeichnen. Siehe zum Beispiel Abbildung 7.

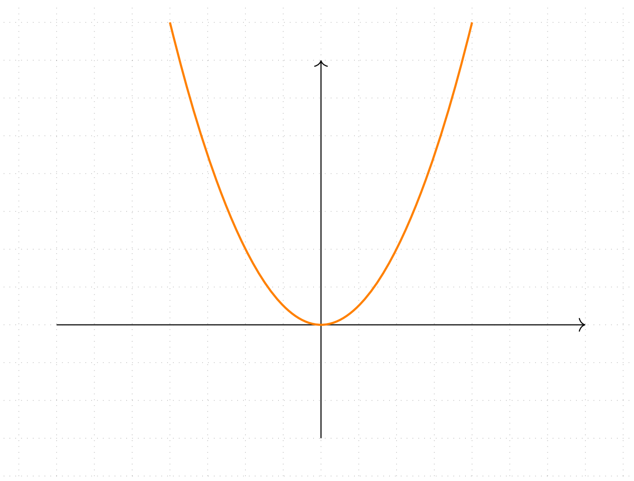


Abbildung 7: Graph der Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ (orange)

Zu viel Verwirrung führt bei Studierenden oft die Frage, ob eine gegebene Abbildung **wohldefiniert** ist. Hier heißt das: Definiert die Zuordnungsvorschrift $x \mapsto f(x)$ für den gegebenen Definitions- und Wertebereich eine Abbildung, wird also jedem $x \in X$ tatsächlich eindeutig ein Wert $y \in Y$ zugeordnet. Das Defizit der Zuordnungsvorschrift kann also verschiedene Gründe haben:

(i) Es gibt Elemente $x \in X$, dessen zugeordnete Werte $f(x)$ nicht in Y liegen. Ein Beispiel hierfür sind

$$f : [0, 1] \to [0, 1], x \mapsto x + 1$$

oder

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto \frac{1}{n}.$$

Diese Beispiel können dadurch gerettet werden, dass man den Wertebereich modifiziert: Ersetzt man diesen durch die reellen Zahlen, so handelt es sich um (wohldefinierte) Abbildungen.

(ii) Es gibt Elemente x von X, die durch die Abbildungsvorschrift keinen Wert zugeordnet bekommen. Dazu betrachten wir das Beispiel

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}.$$

Hier ist das Problem, dass für $x = 0$ die Abbildungsvorschrift $\frac{1}{x}$ gar nicht erst definiert ist. Retten kann man dies, indem man entweder den Definitionsbereich einschränkt (z.B. auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$) oder einen Wert für 0 festlegt und die Abbildung mittels Fallunterscheidungen angibt.

(iii) Es gibt Elemente $x \in X$, die mehr als einen Wert $y \in Y$ zugeordnet bekommen. Ein Beispiel hierfür wäre, wenn wir die Wurzelfunktion definieren, ohne dabei vorher eine Wahl zu treffen, als welche Lösung der Gleichung $X^2 = r$ wir den Ausdruck $\sqrt{r}$ verstehen. Probleme können z.B. auch auftreten, wenn eine Funktion über Fallunterscheidungen definiert wird (Überlege dir hierzu ein Beispiel!). Authentische Beispiele, wo dieser Punkt beachtet werden muss, sind Abbildungen zwischen sogenannte *Quotientenräumen*, die wir in diesem Kurs nicht betrachten werden, aber z.B. in der Linearen Algebra auftauchen. Hier zielt die Frage nach Wohldefiniertheit genauer auf die **Repräsentantenunabhängigkeit** der Abbildungsvorschrift ab. Das Problem kann man z.B. an folgendem Beispiel erkennnen:

$$f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, q = \frac{a}{b} \mapsto a + b.$$

Hier ist der Wert von q abhängig davon, welche Darstellung als Bruch wir von q wählen. Damit wird einem q also mehr als ein Wert zugeordnet.

6.2 Bild und Urbild

Definition 6.6 (Bild und Urbild). Es sei $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ eine Abbildung. Wir setzen für $N \subseteq X$, $M \subseteq Y$:

$$f(N) := \{y \in Y \mid (\exists x \in N \mid f(x) = y)\} \subseteq Y \text{ ("}\textit{Bild}\text{ der Menge } N\text{")}$$

und

$$f^{-1}(M) := \{x \in X \mid f(x) \in M\} \subseteq X \text{ ("}\textit{Urbild}\text{ der Menge } M\text{").}$$

Für ein $y \in Y$ wird das *Urbild* von y unter f definiert als $f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\})$. (Bemerke, dass es sich hierbei um eine Menge handelt.) Für $N = X$ definieren wir $\mathrm{Bild}(f) := f(X)$ (In der Literatur häufig auch $\mathrm{im}(f)$) als *Bild von f*.

Beispiel 6.7. (i) Wir betrachten wieder Beispiel 6.2 (iv) (b), d.h. die Abbildung $f\colon \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ gegeben durch

$$a \mapsto 2, b \mapsto 4, c \mapsto 3, d \mapsto 3.$$

Urbild- und Bildmengen lassen sich leicht am Pfeildiagramm ablesen:

(a) Betrachtet man eine Teilmenge $N \subseteq \{a, b, c, d\}$, so besteht die Bildmenge $f(N)$ genau aus den Punkten des Zielbereichs, die von Punkten aus N ausgehend getroffen werden, z.B. ist $f(\{a, b, c, d\}) = \{2, 3, 4\}$ und $f(\{c, d\}) = \{3\}$.

(b) Betrachtet man eine Teilmenge $M \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$, so bestimmt man die Urbildmenge $f^{-1}(M)$ indem man alle Pfeile, die auf Punkte in M zeigen, zurückverfolgt. Beispielsweise ist $f^{-1}(\{1, 2, 3, 4\}) = \{a, b, c, d\}$ und $f^{-1}(\{3, 4\}) = \{b, c, d\}$. Bemerke insbesondere, dass $f^{-1}(\{3\}) = \{c, d\}$ und $f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$ gilt.

(ii) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.

(a) Dann ist $f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$ und $f^{-1}([0, \infty)) = \mathbb{R}$. Beachte, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) \geq 0$, also ist $f(\mathbb{R}) \subseteq [0, \infty)$. Ferner gibt es für jedes $x \geq 0$ ein $y = \sqrt{x}$ mit $f(y) = x$, also $[0, \infty) \subseteq f(\mathbb{R})$. Insgesamt folgt $f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$. Ähnlich folgt $f^{-1}([0, \infty)) = \mathbb{R}$.

(b) Es ist $f([-1, 1]) = [0, 1]$ und $f^{-1}([-1, 1]) = f^{-1}([0, 1]) = [-1, 1]$.

Aufgabe 6.8. Bestimme Bild- und Urbildmengen für ein weitere Abbildung aus Beispiel 6.2 (oder eine andere Beispielabbildung deiner Wahl)

Lemma 6.9. *Es seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung.*

(i) Für alle $N \subseteq X$ gilt $N \subseteq f^{-1}(f(N))$.

(ii) Für alle $M \subseteq Y$ gilt $f(f^{-1}(M)) \subseteq M$.

Beweis. Zu (i): Sei $x \in N$. Dann existiert $y \in f(N)$ mit $f(x) = y$. Per Definition ist also $x \in f^{-1}(\{y\})$. Betrachten wir die Definitionen

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X \mid f(x) = y\} \quad \text{und} \quad f^{-1}(f(N)) = \{x \in X \mid f(x) \in f(N)\}$$

so sehen wir sofort, dass $f^{-1}(\{y\}) \subseteq f^{-1}(f(N))$ und damit gilt $x \in f^{-1}(f(N))$, was zu zeigen war. $\square$

Aufgabe 6.10. Im Beweis von Lemma 6.9 fehlt Teil (ii) der Aussage. Ergänze den Beweis.

6.3 Eigenschaften von Abbildungen

Wir kommen am Schluss zu drei sehr grundlegenden Eigenschaften von Abbildungen, die wir hier zunächst rein mengentheoretisch studieren.

Definition 6.11 (Injektivität)**.** Es sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Dann heißt f *injektiv*, wenn für alle $a, b \in X$ mit $a \neq b$ folgt $f(a) \neq f(b)$.

Ist $f\colon X \to Y$ eine injektive Abbildung, so kann man dies notieren als $f\colon X \hookrightarrow Y$.

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Offenbar ist f genau dann injektiv, wenn für alle $a, b \in X$ gilt

$$f(a) = f(b) \;\Rightarrow\; a = b.$$

Wir hätten Injektivität also auch über diese Eigenschaft definieren können. Es ist aber immer hilfreich, viele verschiedene Beschreibungen einer Eigenschaft im Kopf zu haben, da sich manche Beschreibung für ein konkretes Beispiel besser eignen als andere. Als Merkregeln eignen sich jedoch besonders gut:

Injektivität bedeutet verschiedene Punkte in X haben verschiedene Bilder in Y bzw. Jedes Element im Zielbereich besitzt **höchstens** ein Urbild.

In dem zuvor eingeführten Pfeildiagramm heißt das: Zwei unterschiedliche Punkte aus dem Definitionsbereich dürfen nicht auf den gleichen Punkt im Bildbereich zeigen. Für Abbildungen zwischen endlichen Mengen (d.h. Mengen, die nur endlich viele Elemente enthalten) ist es also eine **notwendige Bedingung für Injektivität**, dass die Zielmenge mindestens so viele Elemente enthält wie die Urbildmenge.

Sei $f\colon X \to Y$ mit $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Dann gilt $\operatorname{Graph} f \subseteq \mathbb{R}^2$ und wir zeichnen diesen in ein Koordinatensystem, wobei der Definitionsbereich auf der x-Achse und der Zielbereich auf der y-Achse liege. Dann bedeutet Injektivität anschaulich: Wenn ich eine zur x-Achse parallele Gerade entlang des Wertebereichs verschiebe, so schneidet sie den Graphen höchstens in einem Punkt.

Aufgabe 6.12. Überlege dir, was es bedeutet zu prüfen, dass eine Abbildung $f\colon X \to Y$ nicht injektiv ist. Negiere dazu eine der beiden äquivalenten Beschreibungen von Injektivität.

Beispiel 6.13. (i) Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ und $f\colon X \to Y$ mit $f(x) = x^2$. Wir diskutieren Injektivität für verschiedene Wahlen von X und Y. Betrachte dazu auch Abbildung 8.

(a) Seien $X = [0, \infty), Y = \mathbb{R}$. Dann ist $f(x) = x^2$ injektiv, denn: Seien $x, y \in [0, \infty)$ mit $x \neq y$. O.E. ist dann $x < y$. Dann ist aber auch $f(x) = x^2 < y^2 = f(y)$, also $f(x) \neq f(y)$. Dies gilt auch noch, wenn wir $Y = [0, \infty)$ wählen.

(b) Seien $X = \mathbb{R}, Y = [0, \infty)$. Dann ist $f(x) = x^2$ nicht injektiv, denn $f(-1) = f(1)$. Dies gilt auch noch, wenn wir $Y = \mathbb{R}$ wählen.

(ii) Die Pfeildiagramme in Abbildung 9 stellen zwei Abbildungen $g, f\colon \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ dar mit

$$g : a \mapsto 2, b \mapsto 4, c \mapsto 3, d \mapsto 1,$$

bzw.

$$f : a \mapsto 2, b \mapsto 4, c \mapsto 3, d \mapsto 3.$$

Dann ist f nicht injektiv, da $c \neq d$, aber $f(c) = 3 = f(d)$. Dagegen ist g injektiv, da jedes Element von $\{1, 2, 3, 4\}$ höchstens ein Urbild besitzt.

(iii) Die Abbildung

$$f\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, (a, b) \mapsto \frac{a}{b}$$

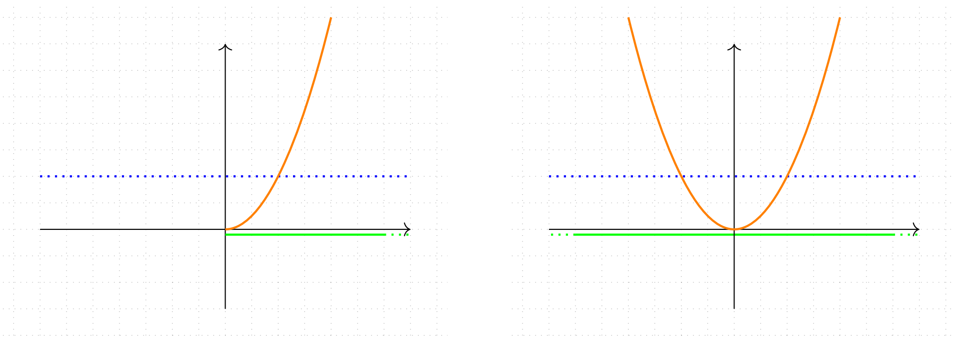
ist nicht injektiv. Betrachte $(1, 1), (2, 2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Dann gilt $(1, 1) \neq (2, 2)$, aber $f((1, 1)) = 1 = f((2, 2))$.

Aufgabe 6.14. Überlege dir, wieso man jede Inklusion von Mengen als injektive Abbildung auffassen kann.

Aufgabe 6.15. Überlege dir, warum eine Abbildung

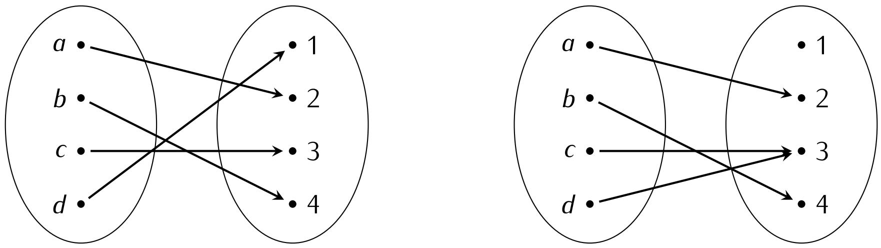
$$h\colon \{a, b, c, d, e\} \to \{1, 2, 3, 4\}$$

nicht injektiv sein kann. Betrachte dazu zum Beispiel Abbildung 9 und überlege dir, was passiert, wenn ich die Definitionsmenge um ein Element ergänze.



(a) Injektiv (b) Nicht injektiv

Abbildung 8: Graphen der Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ (orange) mit (a) $X = [0, \infty)$ und (b) $X = \mathbb{R}$ (grün)



(a) Injektiv (b) Nicht Injektiv

Abbildung 9: Zwei Abbildungen $g, f\colon \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ als Pfeildiagramme

Definition 6.16 (Surjektivität)**.** Es sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Dann heißt f *surjektiv*, wenn $f(X) = Y$ gilt.

Ist $f\colon X \to Y$ surjektiv, so schreiben wir auch $f\colon X \twoheadrightarrow Y$.

Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Dann ist f surjektiv genau dann, wenn für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert mit $f(x) = y$. In Formeln:

$$\forall y \in Y\, \exists x \in X : f(x) = y.$$

Als Merkregel:

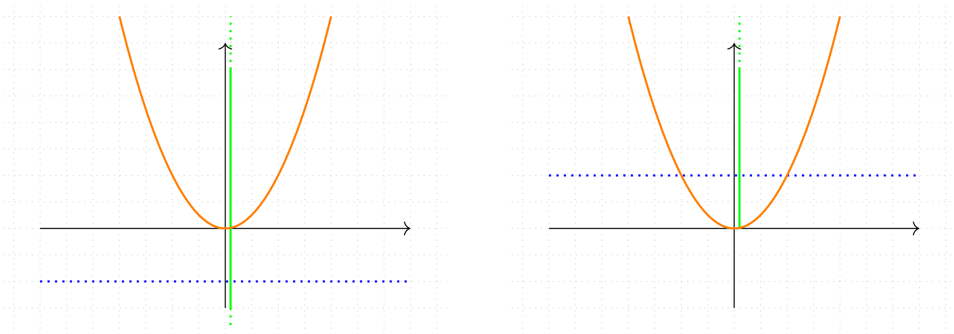
> Surjektivität heißt, dass jedes Element aus dem Zielbereich **mindestens** ein Urbild besitzt.

In dem zuvor eingeführten Pfeildiagramm heißt das: Auf jeden Punkt des Zielraums muss mindestens ein Pfeil zeigen. Bei Abbildungen endlicher Mengen ist es also eine **notwendige Bedingung für Surjektivität**, dass die Zielmenge höchstens so viele Elemente enthält wie die Urbildmenge.

Sei $f\colon X \to Y$ mit $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Dann gilt $\operatorname{Graph} f \subseteq \mathbb{R}^2$ und wir zeichnen diesen in ein Koordinatensystem, wobei der Definitionsbereich auf der x-Achse und der Zielbereich auf der

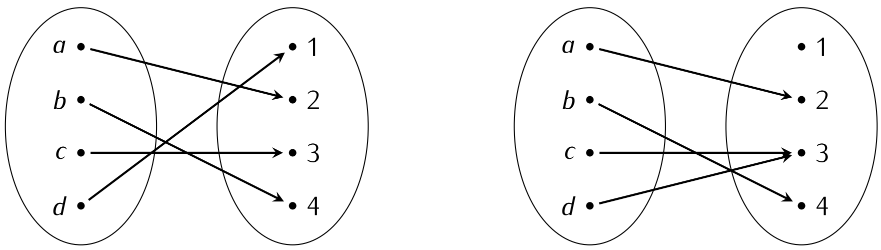
y-Achse liege. Dann bedeutet Surjektivität anschaulich: Wenn ich eine zur x-Achse parallele Gerade entlang des Wertebereichs verschieben, so schneidet sie den Graphen mindestens in einem Punkt.

Aufgabe 6.17. Überlege dir, was es bedeutet zu prüfen, dass eine Abbildung $f : X \to Y$ nicht surjektiv ist. Negiere dazu eine der beiden äquivalenten Beschreibungen von Surjektivität.



(a) Nicht surjektiv (b) Surjektiv

Abbildung 10: Graphen der Funktion $f : \mathbb{R} \to Y, x \mapsto x^2$ (orange) mit (a) $Y = \mathbb{R}$ und (b) $Y = [0, \infty)$ (grün)



(a) Surjektiv (b) Nicht Surjektiv

Abbildung 11: Zwei Abbildungen $g, f : \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ als Pfeildiagramme

Beispiel 6.18. (i) Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ und $f : X \to Y$ mit $f(x) = x^2$. Wir diskutieren Surjektivität für verschiedene Wahlen von X und Y. Siehe dazu Abbildung 10.

(a) Seien $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}$. Dann ist $f(x) = x^2$ nicht surjektiv, denn: Beachte, $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also gibt es kein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = -1$. Das gilt also insbesondere noch für $X = [0, \infty)$

(b) Seien $X = \mathbb{R}, Y = [0, \infty)$. Dann ist $f(x) = x^2$ surjektiv, denn gilt für jedes $y \in [0, \infty)$ stets $f(\sqrt{y}) = y$, wobei wir mit $\sqrt{y}$ die nicht-negative Wurzel von y meinen. Insbesondere gilt dies also genauso für $X = [0, \infty)$.

(ii) Die Pfeildiagramme in Abbildung 11 stellen zwei Abbildungen $g, f : \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ dar mit

$$g : a \mapsto 2, b \mapsto 4, c \mapsto 3, d \mapsto 1,$$

bzw.

$$f : a \mapsto 2, b \mapsto 4, c \mapsto 3, d \mapsto 3.$$

Dann ist f nicht surjektiv, da 1 kein Urbild unter f besitzt. Dagegen ist g surjektiv, da jedes Element von $\{1, 2, 3, 4\}$ ein Urbild unter g besitzt.

(iii) Die Abbildung

$$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, (a, b) \mapsto \frac{a}{b}$$

ist surjektiv, denn für jedes $q \in \mathbb{Q}$ existieren (per Definition) $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}$ sodass $q = \frac{a}{b}$. (Die Abbildung ist jedoch nicht injektiv, da diese (a, b) nicht eindeutig sind.)

Aufgabe 6.19. Überlege dir, warum eine Abbildung

$$h : \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

nicht surjektiv sein kann.

Definition 6.20 (Bijektivität)**.** Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann heißt f *bijektiv*, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Ist $f : X \to Y$ eine bijektive Abbildung, so schreibt man dies in Kurzform auch als $f : X \xrightarrow{\sim} Y$.

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann ist f bijektiv genau dann, wenn für jedes $y \in Y$ genau ein $x \in X$ existiert mit $f(x) = y$. In Formeln:

$$\forall y \in Y \, \exists! x \in X : f(x) = y.$$

Als Merkregel:

Bijektivität heißt, dass jedes Element aus dem Zielbereich **genau** ein Urbild besitzt.

In dem zuvor eingeführten Pfeildiagramm heißt das: Auf jeden Punkt des Zielraums muss genau ein Pfeil zeigen. Für Abbildungen zwischen endlichen Mengen ist es also eine **notwendige Bedingung für Bijektivität**, dass die Zielmenge genauso viele Elemente enthält wie die Urbildmenge.

Um zu zeigen, dass eine Abbildung f nicht bijektiv ist, genügt es schon zu zeigen, dass f nicht injektiv oder nicht surjektiv ist.

Beispiel 6.21. (i) Die Identitätsabbildung ist bijektiv.

(ii) Die Abbildung $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ mit $f(x) = x^2$ ist bijektiv.

(iii) Die Abbildungen $g : \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ gegeben durch

$$g : a \mapsto 2, b \mapsto 4, c \mapsto 3, d \mapsto 1,$$

ist bijektiv, da jedem Element aus $\{1, 2, 3, 4\}$ genau ein Element aus $\{a, b, c, d\}$ zugeordnet wird.

(iv) Gegenbeispiele sind entsprechend Abbildungen die nicht injektiv oder nicht surjektiv sind.

Bemerkung 6.22. Eine äquivalente Definition von bijektiven Abbildungen, die wir hier auslassen, ist über die Existenz einer **Umkehrfunktion** gegeben. Als Kriterium für Bijektivität ist dies manchmal praktisch: Wenn man eine Umkehrabbildung angeben kann, dann hat man automatisch schon gezeigt, dass die Abbildung bijektiv ist. Leider kann man selbst in konkreten Beispielen Umkehrfunktionen oft nicht direkt bestimmen. Dass Bijektivität die Existenz einer Umkehrfunktion impliziert, egal ob wir wissen wie diese aussieht oder nicht, ist auch jenseits von Beispielen sehr hilfreich.

A Dinge, die im ersten Semester helfen können

A.1 Symbolliste

Logik

Symbol	Definiert für	In Worten	Erklärung und Beispiel
$A := B$	"Objekte" A, B	*A wird definiert als B*	Das Objekt A auf der Seite von : ist definiert durch den Ausdruck B. *Bsp.:* $n := 5$, $M := \{1, 2, 3\}$.
$A :\Leftrightarrow B$	Aussagen A, B	*A wird definiert als als B*	Die Aussage/der Ausdruck A auf der Seite von : ist definiert durch die Aussage/die Eigenschaft B (benutzt vor allem in Definitionen). *Bsp.:* ($z \in \mathbb{Z}$ ist eine gerade Zahl) $:\Leftrightarrow$ ($\exists k \in \mathbb{Z} : z = 2k$)
$\neg A$	Aussage A	*nicht A*	Logische Negation: Ist A wahr, so ist $\neg A$ falsch und umgekehrt. *Bsp.:* $\neg$ ("Die Tafel ist grün") = ("Die Tafel ist nicht grün")
$A \wedge B$	Aussagen A, B	*A und B*	Logische Kunjunktion: Nur wenn A und B wahr sind, ist $A \wedge B$ wahr *Bsp.:* ("2 ist gerade") $\wedge$ ("4 ist gerade ") ist wahr.
$A \vee B$	Aussagen A, B	*A oder B*	Logische Disjunktion (einschließendes Oder): $A \vee B$ ist wahr, wenn A oder B wahr ist. *Bsp.:* Sei $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist (n ist gerade) $\vee$ ($n + 1$ ist gerade) wahr.
$A \Rightarrow B$	Aussagen A, B	*A impliziert B*	Logische Implikation: Ist A wahr, so muss auch B wahr sein. *Bsp.:* Sei $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt: (n gerade) $\Rightarrow$ (n^2 gerade).
$A \Leftrightarrow B$	Aussagen A, B	*A ist äquivalent zu B*	Logische Äquivalenz: A ist **genau dann** wahr, **wenn** B wahr ist. Definiert als ($A \Rightarrow B$) und ($B \Rightarrow A$). *Bsp.:* Sei $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt: (n gerade) $\Leftrightarrow$ (n^2 gerade).
$\exists$		*Es existiert (mind.) ein*	Symbol für Existenzquantor *Verwendung:* $\exists x : A(x)$ (wobei $A(x)$ eine Aussageform bezeichne). *Bsp.:* $\exists n \in \mathbb{Z} : n > 5$
$\exists!$		*Es existiert genau ein*	Symbol für eindeutigen Existenzquantor *Verwendung:* $\exists! x : A(x)$ (wobei $A(x)$ eine Aussageform bezeichne). *Bsp.:* $\exists! p \in \mathbb{Z}$: ((p ist Primzahl) $\wedge$ (p ist gerade))
$\forall$		*Für alle*	Symbol für Allquantor *Verwendung:* $\forall x : A(x)$ (wobei $A(x)$ eine Aussageform bezeichne). *Bsp.:* $\forall n \in \mathbb{Z} : n + 1 \in \mathbb{Z}$

Mengenlehre

Symbol	Definiert für	In Worten	Erklärung und Beispiel
$\{\ldots\}$		*Menge bestehend aus*	Aufgelistete "Objekte" innerhalb der Mengenklammern sind die Elemente der Menge. *Bsp.:* $\{1,2,3\}$ ist die Menge mit den Elementen $1,2,3$
$x \in M$ (bzw. $x \notin M$)	Menge M	*x ist (nicht) Element von M*	Bedeutet, dass x (nicht) ein Element in der Menge M ist. *Bsp.:* $1 \in \{1,2,3\}$, aber $\{1\} \notin \{1,2,3\}$
$\{x \mid A(x)\}$	Aussageform $A(x)$	*Menge von...mit...*	Beschreibung einer Menge durch Angabe einer Eigenschaft, die ihre Elemente erfüllen. *Bsp.:* $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ ist gerade}\}$ beschreibt die Menge gerader Zahlen.
$\emptyset$		*Leere Menge*	Die Menge, die keine Elemente enthält. *Formal:* $\emptyset := \{\}$
$N \subseteq M$	Mengen N, M	*N ist Teilmenge von M*	Jedes Element von N ist auch ein Element von M. *Formal:* $\forall x : (x \in N \Rightarrow x \in M)$ *Bsp.:* $\{1\} \subseteq \{1,2,3\}$ oder $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ ist gerade}\} \subseteq \mathbb{Z}$
$N = M$	Mengen N, M	*N ist gleich M*	Jedes Element von N ist auch ein Element von M und umgekehrt ($N \subseteq M$ und $M \subseteq N$). *Formal:* $\forall x : (x \in N \Leftrightarrow x \in M)$ *Bsp.:* $\{n \in \mathbb{Z} \mid 2 \mid n \wedge 3 \mid n\} = \{n \in \mathbb{N} \mid 6 \mid n\}$
$N \cup M$	Mengen N, M	*Vereinigung von N und M*	$N \cup M$ enthält alle Elemente, die in N oder M enthalten sind. *Formal:* $\forall x : (x \in N \cup M \Leftrightarrow (x \in N \vee x \in M))$ *Bsp.:* $\{1,4\} \cup \{1,2,3\} = \{1,2,3,4\}$
$N \cap M$	Mengen N, M	*(Durch-)Schnitt von N und M*	$N \cap M$ enthält alle Elemente, die sowohl in N als auch in M enthalten sind. *Formal:* $\forall x : (x \in N \cap M \Leftrightarrow (x \in N \wedge x \in M))$ *Bsp.:* $\{1,4\} \cap \{1,2,3\} = \{1\}$
$N \setminus M$	Mengen N, M	*N ohne M*	Differenzmenge: Alle Elemente, die in N, aber nicht in M liegen. *Formal:* $\forall x : (x \in N \setminus M) \Leftrightarrow (x \in N \wedge x \notin M))$ *Bsp.:* $\{1,4,5\} \setminus \{1,2,3\} = \{4,5\}$
N^c	Menge N mit $N \subseteq M$	*Komplement von N in M*	Spezialfall von $M \setminus N$, wenn $N \subseteq M$.
$N \times M$	Mengen N, M	*(kartesisches) Produkt von N und M*	Geordnete Tupel (n, m) mit $n \in N$ und $m \in M$. *Formal:* $M \times N := \{(m, n) \mid m \in M,\ n \in N\}$ *Bsp.:* $\{1\} \times \{a, b, c\} = \{(1, a), (1, b), (1, c)\}$

Abbildungen

Symbol	Definiert für	In Worten	Erklärung und Beispiel
$f: X \to Y$	Mengen X, Y	*Abbildung von X nach Y*	Jedem Element $x \in X$ wird genau ein Element $y \in Y$ zugeordnet. Wir nennen X den **Definitionsbereich** und Y den **Ziel-** oder **Wertebereich** von f.
$x \mapsto f(x)$	Abbildung f	*x geht auf $f(x)$*	Abbildungsvorschrift von f: Das Element x wird auf das Element $y = f(x)$ abgebildet. *Bsp.:* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$
$\operatorname{Graph} f$	Abbildung $f : X \to Y$	*Graph von f*	Geordnete Paare $(x, f(x)) \in X \times Y$. *Formal:* $\operatorname{Graph} f := \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$ *Bsp.:* Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ gilt $\operatorname{Graph} f = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
$f(N)$	Abbildung $f : X \to Y$, $N \subseteq X$	*Bildmenge von N unter f*	Menge aller Werte, die eine Abbildung f für Elemente aus N annimmt. *Formal:* $f(N) := \{y \in Y \mid (\exists x \in N \mid f(x) = y)\}$ *Bsp.:* Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ gilt $f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$.
$\operatorname{Bild}(f)$	Abbildung $f : X \to Y$	*Bild von f*	Spezialfall der Bildmenge für $N = X$.
$f^{-1}(M)$	Abbildung $f : X \to Y$, $M \subseteq Y$	*Urbildmenge von M unter f*	Menge aller Elemente aus X, die auf Elemente aus M abgebildet werden. *Formal:* $f^{-1}(M) := \{x \in X \mid f(x) \in M\}$ *Bsp.:* Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ gilt $f^{-1}([0, \infty)) = \mathbb{R}$.
$f: X \hookrightarrow Y$	Mengen X, Y	*injektive Abbildung von X nach Y*	Jedes $y \in Y$ hat **höchstens** ein Urbild $x \in X$. *Formal:* $\forall x, x' \in X : (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$ *Bsp.:* $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$
$f: X \twoheadrightarrow Y$	Mengen X, Y	*surjektive Abbildung von X nach Y*	Jedes $y \in Y$ hat **mindestens** ein Urbild $x \in X$. *Formal:* $\forall y \in Y \, \exists x \in X : y = f(x)$. *Bsp.:* $f: \mathbb{R} \to [0, \infty), x \mapsto x^2$
$f: X \xrightarrow{\sim} Y$	Mengen X, Y	*bijektive Abbildung von X nach Y*	Jedes $y \in Y$ hat **genau** ein Urbild. bzw.: f ist injektiv und surjektiv. *Formal:* $\forall y \in Y \, \exists! x \in X : y = f(x)$. *Bsp.:* $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$

A.2 Griechisches Alphabet

Name	Kleinbuchstabe	Großbuchstabe
Alpha	α	A
Beta	β	B
Gamma	γ	Γ
Delta	δ	Δ
Epsilon	ϵ	E
Zeta	ζ	Z
Eta	η	E
Theta	θ	Θ
Iota	ι	I
Kappa	κ	K
Lambda	λ	Λ
Mu	μ	M
Nu	ν	N
Omicron	o	O
Pi	π	Π
Rho	ρ	R
Sigma	σ	Σ
Tau	τ	T
Upsilon	υ	Υ
Phi	ϕ	Φ
Chi	χ	X
Psi	ψ	Ψ
Omega	ω	Ω

B Übungsaufgaben

Diese Übungsaufgaben sind dafür da um zu überprüfen, ob man den Vorlesungsstoff verstanden hat und um ihn zu vertiefen. Darüber hinaus lernt man erst durch das Bearbeiten von Übungsaufgaben, wie Mathematik funktioniert. Das erfordert Zeit, aber diese Zeit ist notwendig und wichtig. Erst diejenigen Aufgaben, die man aufschreiben und erklären kann, hat man richtig verstanden. Gute Tipps zum Bearbeiten von Übungsaufgaben findet ihr im Text *Wie bearbeitet man ein Übungsblatt?*[8] von Manfred Lehn.

Übungen zu Kapitel 1

Übung 1. Direkte Beweise – (Un-)Gerade Zahlen Zeige die folgenden Behauptungen.

(i) Die Summe zweier ungeraden Zahlen ist gerade.

(ii) Das Produkt zweier ungerader Zahlen ist ungerade.

(iii) Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt: Ist n gerade, so ist für alle $m \in \mathbb{Z}$ das Produkt $n \cdot m$ eine gerade Zahl.

(iv) Diskussionsfrage: Angenommen wir lassen in unseren Definitionen einer geraden bzw. ungeraden Zahl für n und k statt ganzer Zahlen sogar rationale Zahlen zu. Was passiert? Wie sieht es aus, wenn wir stattdessen für n und k nur natürliche Zahlen zulassen?

Übung 2. Seien a, b und c ganze Zahlen. Wenn $a \mid b$ und $b \mid c$ gilt, dann gilt $a \mid c$.

Übung 3. Zeige die folgende Behauptungen:

(i) Für alle reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

Tipp: Bei dieser Aufgabe bietet es sich an rückwärts vorzugehen. Betrachte zuerst den Ausdruck $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ und forme diesen um.

(ii) Seien a, b positive reelle Zahlen mit $a \leq b$. Dann gilt $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

Übung 4 (Teleskopsummen und -produkte)**.** Sei n eine natürliche Zahl und seien a_i für $i = 0, 1, \ldots, n$ reelle Zahlen. Vereinfache die Ausdrücke

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) \quad \text{und} \quad \prod_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_{i-1}} \quad \text{(wobei hier } a_i \neq 0 \text{ seien).}$$

Übung 5. Benutze die Tipps zum Lesen von Definitionen um folgende Definition (übernommen aus einem Vorlesungsskript zur Linearen Algebra 1) zu verstehen.

Definition. Eine Gruppe ist eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfung $\circ$, die allen Elementen $a, b \in G$ ein Gruppenelement $a \circ b$ in G zuordnet, so dass gilt

(i) Die Verknüpfung ist *assoziativ*, d.h. es gilt $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ für alle $a, b, c \in G$.

(ii) G besitzt ein neutrales Element bezüglich $\circ$, d.h. es existiert ein $e \in G$ mit $e \circ a = a \circ e = a$ für alle $a \in G$.

(iii) Jedes Element von G besitzt ein Inverses, d.h. für alle $a \in G$ existiert ein $b \in G$ mit $a \circ b = b \circ a = e$.

[8] Online abrufbar unter:
https://www.agtz.mathematik.uni-mainz.de/wie-bearbeitet-man-ein-uebungsblatt-von-prof-dr-manfred-lehn/

Übungen zu Kapitel 2

Übung 6. Ist der folgende Schluss richtig? ("Wer von der Quantenmechanik nicht schockiert ist, der hat sie nicht verstanden" (Nils Bohr) $\wedge$ "Niemand versteht die Quantenmechanik" (Richard Feynman)) $\Rightarrow$ "Niemand ist von der Quantenmechanik schockiert"

Übung 7. Warum liegt hier überhaupt Stroh? Vor dir stehen drei Kisten, von denen du nur eine wählen darfst. In zwei Kisten ist Stroh, in einer Gold. Der Inhalt der gewählten Kiste gehört dir. Auf den Kisten steht

1. Kiste: Hier ist Stroh drin
2. Kiste: Hier ist Gold drin
3. Kiste: In der 2. Kiste ist Stroh.

Leider ist nur genau eine der drei Aufschriften richtig. Welche Kiste wählst du?

Übung 8. Wir betrachten die Aussagen A und B über dessen Wahrheitswert wir nichts wissen. Es gelte jedoch $A \Leftrightarrow B$. Was lässt sich über die folgenden Aussagen sagen?

(i) $\neg B \Leftrightarrow \neg A$,

(ii) $\neg A \Rightarrow \neg B$,

(iii) $B \Rightarrow \neg A$,

(iv) $\neg B \Leftrightarrow A$.

Übung 9. Beweise die folgenden Aussagen...

(i) ...via Kontraposition: Ist r irrational, so ist auch $\sqrt{r}$ irrational.

(ii) ...per Widerspruchsbeweis: Seien a, b reellen Zahlen. Ist $a \cdot b = 0$, so gilt $(a = 0 \vee b = 0)$.

Übung 10. Beweise Lemma 2.22. Seien A und B Aussagen. Dann gilt:

(i) $A \Leftrightarrow \neg\neg A$ (Doppelnegationsregel).

(ii) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (Kontrapositionsregel).

(iii) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ (Widerspruchsregel).

Übung 11. Schreibe die folgende Kombinationen aus logischen Symbolen als Satz aus, wie du ihn lesen würdest:

(i) $\forall x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{Z} : \exists m \in \mathbb{Z} : m \leq x < n$;

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x, y \in [0, 1] : \left(|x - y| < \delta \Rightarrow \left|x^2 - y^2\right| < \varepsilon\right)$;

(iii) $\exists L > 0 : \forall a, b \geq 0 : [ab = 1 \Rightarrow a + b \leq L]$.

Übung 12. Schreibe die folgenden Aussagen mit Hilfe von formaler Schreibweise und Quantoren:

(i) Für alle natürlichen Zahlen n und rationale Zahlen x gibt es eine rationale Zahl y, die das n-fache Produkt von x ist.

(ii) Jede ganze Zahl ist entweder gerade oder ungerade.

Übung 13. Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

(i) Es gibt quadratische Gleichungen, die keine reellen Lösungen haben.

(ii) Für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geq 2$ ist $2^n - 1$ eine Primzahl.

Übung 14 (Zusatzaufgabe). Benutze Lemma 1.14 um folgende Charakterisierung von Primzahlen zu beweisen:

> **Satz.** *Eine natürliche Zahl $p > 1$ ist genau dann eine Primzahl, wenn für alle natürliche Zahlen $k, m > 1$ gilt*
> $$p|km \Rightarrow (p|k \vee p \mid m).$$

Übung 15. Nutze das Prinzip der vollständigen Induktion um die folgenden Aussagen zu zeigen:

(i) Für alle $n \geq 1$ gilt:
$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

(ii) Für alle $n \geq 1$ gilt:
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}.$$

(iii) Für alle $n \geq 1$ gilt:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Für die folgende Aufgabe benötigen wir den *Bionomialkoeffizient*. Dieser ist für natürliche Zahlen n und $0 \leq k \leq n$ definiert als
$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$
(Bemerke hierbei, dass $0! := 1$.) Für $k > n$ setzen wir $\binom{n}{k} = 0$.

Übung 16 (Binomischer Lehrsatz). Für alle reellen Zahlen x und y und für alle natürlichen Zahlen n gilt:
$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \binom{n}{0} y^n + \binom{n}{1} x y^{n-1} + \binom{n}{2} x^2 y^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n} x^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.\end{aligned}$$

Übung 17. Nutze das Prinzip der vollständigen Induktion um die folgenden Aussagen zu zeigen:

(i) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 5$ gilt
$$2^n > n^2.$$

(ii) Sei x eine reelle Zahl mit $x > -1$. Für alle natürliche Zahlen n gilt
$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Übung 18. Nutze das Prinzip der vollständigen Induktion um die folgenden Aussagen zu zeigen:

(i) $5^{2n+1} + 2^{2n+1}$ ist teilbar durch 7 für alle $n \geq 0$.

(ii) $n(n+2)$ ist teilbar durch 8 für alle geraden $n \geq 2$.

(iii) $2^n + 1$ ist teilbar durch 3 für alle ungeraden n.

Übung 19. Bestimme die Summe der Innenwinkel eines n-Ecks, und beweise deine Formel mit Hilfe des Prinzips der vollständigen Induktion.

Aufgabe B.1 (Erdős & Suranyi)**.** Jede positive ganze Zahl kann geschrieben werden in der Form $\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \cdots \pm \ell^2$ für eine positive ganze Zahl ℓ und passender Vorzeichenwahl.

Tipp: Nutze die Identität

$$(x+1)^2 - (x+2)^2 - (x+3)^2 + (x+4)^2 = 4.$$

Übungen zu Kapitel 3

Übung 20. Zeige die folgenden Mengengleichheiten:

(i) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 1\} = [-1, 1]$;

(ii) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < x\} = (0, 1)$.

Übung 21. Es sei M eine Menge, $A, B \subseteq M$ (d.h. $A \subseteq M$, $B \subseteq M$). Zeige die noch unbewiesenen Teile von Lemma 4.33, d.h.

(ii) $A = (A^c)^c$;

(iii) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;

(iv) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Übung 22. Prüfe mit Hilfe von Venn-Diagrammen, ob nachfolgende Mengenidentitäten stimmen. Wenn ja, beweise sie formal. Wenn nein, finde ein konkretes Gegenbeispiel. Seien A, B, C Mengen.

(i) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \subseteq A$;

(ii) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A$.

Übung 23. Wir betrachten eine weitere Mengenoperation:

> **Definition.** Seien N, M Mengen. Wir definieren die *symmetrische Differenz* $N \triangle M$ von N und M als die Menge derjenigen Elemente von N und M, die nicht in beiden Mengen liegen, d.h.
>
> $$N \triangle M := (N \setminus M) \cup (M \setminus N) = (N \cup M) \setminus (N \cap M). \qquad (*)$$

(i) Visualisiere dir diese Definition mithilfe eines Venn-Diagramms.

(ii) Was passiert, wenn $N \subseteq M$?

(iii) Bestimme $N \triangle M$ in den folgenden Beispielen.

- (a) $N = \{1, 2, 3\}$ und $M = \{2, 3, 4, 5\}$;
- (b) $N = \mathbb{N}$ und $M = \mathbb{Q}$;
- (c) Überlege dir selbst ein Beispiel.

(iv) In dieser Definition hat sich eine Behauptung versteckt. Zeige die zweite Gleichheit in $(*)$.

(v) Gibt es eine logische Operation, die zu dieser Mengenoperation passt?

Übung 24. Bestimme für die folgenden Zahlen den Realteil, Imaginärteil und den Betrag. Zeichne ferner diese Werte in die komplexe Zahlenebene.

$$i+1, \quad 3+i, \quad \frac{1+i}{2}, \quad 2, \quad 3i.$$

Übung 25. Stelle dir folgenden komplexen Zahlen in der Form $a+bi$ für reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ dar:

$$z_1 = \frac{1-i}{2i}, z_2 = \frac{1+i}{1-i} z_3 = \left|\frac{2-3i}{3+i}\right|, z_4 = (3+2i)^4, z_5 = i^{1001}, z_6 = \sum_{n=1}^{123} i^n.$$

Übung 26. Finde Sie diejenigen $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 = i$.

Übung zu Kapitel 4

Übung 27. Welche der folgenden Zuordnungen sind wohldefinierte Abbildungen:

(i) Mensch $\mapsto$ Körpergröße

(ii) Körpergewicht $\mapsto$ Mensch

(iii) Mensch $\mapsto$ Telefonnummer

Übung 28. Entscheide, ob die folgenden Abbildungen wohldefiniert sowie injekiv, surjektiv oder bijektiv sind:

(i) $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n^2$;

(ii) $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto n^2$;

(iii) $f_3 : \mathbb{R} \to [0, \infty), x \mapsto x^2 + 1$;

(iv) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 4x + 1$;

(v) $f_5 : \mathbb{R} \to [-1, 1], x \mapsto \sin x$.

Übung 29. Es seien X, Y endlichen Mengen mit n bzw. m Elementen (Wir schreiben auch $|X| = n$ und $|Y| = m$ und sprechen von der *Mächtigkeit* von X und Y). Wie viele verschiedene Abbildungen $f : X \to Y$ gibt es?

Übung 30. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und und seien $N_1, N_2 \subseteq X$ und $M_1, M_2 \subseteq Y$ Teilmengen. Zeige, dass gilt

(i) Bild und Urbild sind mit der Vereinigung zweier Mengen verträglich, d.h.

  (a) $f^{-1}(M_1 \cup M_2) = f^{-1}(M_1) \cup f^{-1}(M_2)$ und

  (b) $f(N_1 \cup N_2) = f(N_1) \cup f(N_2)$.

(ii) Bild und Urbild sind (fast) mit dem Schnitt zweier Mengen verträglich, d.h.

  (a) $f^{-1}(M_1 \cap M_2) = f^{-1}(M_1) \cup f^{-1}(M_2)$ und

  (b) $f(N_1 \cup N_2) \subseteq f(N_1) \cup f(N_2)$.

(iii) Finde ein Beispiel, in dem die Inklusion aus (ii) (b)...

(a) eine Gleichheit ist;

(b) eine echte Inklusion ist.

Übung 31.

Es seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeige:

(i) f ist injektiv genau dann, wenn $f^{-1}(f(N)) = N$ für alle $N \subseteq X$ gilt.

(ii) f ist surjektiv genau dann, wenn $f(f^{-1}(M)) = M$ für alle $M \subseteq X$ gilt.