Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2022

Einführung in Mathematisches Denken und Arbeiten
M. Sc. Theresa Kumpitsch

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (Definition (un-)gerader Zahlen)

Angenommen wir lassen in unseren Definitionen einer geraden bzw. ungeraden Zahl für n und k statt ganzer Zahlen sogar rationale Zahlen zu. Was passiert?

Wie sieht es aus, wenn wir stattdessen für n und k nur natürliche Zahlen zulassen?

Aufgabe 2 (Direkte Beweise – (Un-)Gerade Zahlen)

Zeige die folgenden Behauptungen.

(a) Die Summe zweier ungeraden Zahlen ist gerade.

(b) Das Produkt zweier ungerader Zahlen ist ungerade.

(c) Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt: Ist n gerade, ist für alle $m \in \mathbb{Z}$ das Produkt $n \cdot m$ eine gerade Zahl.

Aufgabe 3 (Direkte Beweise – Teilbarkeit)

Seien a, b und c ganze Zahlen. Wenn $a \mid b$ und $b \mid c$ gilt, dann gilt $a \mid c$.

Aufgabe 4 (Direkte Beweise – Reelle Zahlen)

Zeige, dass für alle reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

Aufgabe 5 (Bonusaufgabe)

Sei n eine natürliche Zahl mit $n > 1$, die keine Primzahl ist. Zeige, dass es eine eine Primzahl p gibt, die n teilt, und für die gilt $1 < p \leq \sqrt{n}$.