Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2022

Einführung in Mathematisches Denken und Arbeiten
M. Sc. Theresa Kumpitsch

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (Eine Menge Übungen)

(a) Zeige die folgenden Mengengleichheiten:

(i) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 1\} = [-1, 1]$;

(ii) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < x\} = (0, 1)$.

(b) Für eine gegebene Universalmenge U bestimme zu gegebenen Mengen A und B die Mengen A^c, $A \cup B$ und $A \cap B$.

(i) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 3, 5, 8\}$, $B = \{2, 3, 5, 6\}$;

(ii) $U = \mathbb{R}$, $A = (-\infty, 2]$, $B = (-1, \infty)$;

(iii) $U = \mathbb{Z}$, $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ ist gerade}\}$, $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ ist ungerade}\}$.

Aufgabe 2 (Mengenbeweise)

Es sei M eine Menge, $A, B \subseteq M$ (d.h. $A \subseteq M$, $B \subseteq M$). Zeige die noch unbewiesenen Teile von Lemma 4.33, d.h.

(ii) $A = (A^c)^c$;

(iii) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;

(iv) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Aufgabe 3 (Symmetrische Differenz)

Wir betrachten eine weitere Mengenoperation:

> **Definition.** Seien N, M Mengen. Wir definieren die *symmetrische Differenz* $N \triangle M$ von N und M als die Menge derjenigen Elemente von N und M, die nicht in beiden Mengen liegen, d.h.
>
> $$N \triangle M \coloneqq (N \setminus M) \cup (M \setminus N) = (N \cup M) \setminus (N \cap M). \qquad (*)$$

(a) Visualisiere dir diese Definition mithilfe eines Venn-Diagramms.

(b) Was passiert, wenn $N \subseteq M$?

(c) Bestimme $N \triangle M$ in den folgenden Beispielen.

(i) $N = \{1, 2, 3\}$ und $M = \{2, 3, 4, 5\}$;

(ii) $N = \mathbb{N}$ und $M = \mathbb{Q}$;

(iii) Überlege dir selbst ein Beispiel.

(d) In dieser Definition hat sich eine Behauptung versteckt. Zeige die zweite Gleichheit in $(*)$.

(e) Gibt es eine logische Operation, die zu dieser Mengenoperation passt?