

Mathe Vorkurs für Studierende der (Bio-)Physik
oder Meteorologie
Blatt 0

1. Aufgabe: Brüche, Potenzen und Logarithmen

a) Berechnen Sie:

$$\frac{\frac{3}{7} \cdot \left(\frac{12}{9} - \frac{38}{13}\right) + \frac{66}{91}}{\frac{8}{13} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{12}\right)}$$

b) Vereinfachen Sie:

$$\left(\frac{2a^2 + ab}{4c} - \frac{6a^2 - 2ab}{8c} + \frac{6a^2 + 3b^2}{12c}\right) \cdot \frac{8c}{a+b}$$

c) Vereinfachen Sie:

$$\frac{4}{x^2 - y^2} \cdot \left(\frac{2}{x+y}\right)^{-2}$$

d) Vereinfachen Sie:

$$\sqrt{\sqrt{x} - y^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}} + \sqrt{y}\right)^{\frac{1}{2}}$$

e) Berechnen Sie x:

$$\log_4(3x+1) = 3$$

f) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ derart, dass $\log(a+b) = 2$ gelte. Berechnen Sie:

$$\log(a-b) + \log(\sqrt{a+b}) - \log\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + 2ab + b^2}\right)$$

2. Aufgabe: Funktionen und Polynome

a) Sei $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ gegeben durch $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

Untersuchen Sie die Funktion f auf Injektivität und Surjektivität. Was passiert für $f: \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$?

b) Finden Sie die Nullstellen folgender Polynome:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24,$$

$$g(x) = (x-8) \cdot (x^2 - x - 12),$$

$$h(x) = x^4 - 13x^2 + 36$$

3. Aufgabe: Ebene Geometrie

Berechnen Sie die fehlenden Stücke im rechtwinkligen Dreieck ABC mit $\gamma = 90^\circ$:

- a) $a = 4,5\text{cm}, c = 7,3\text{cm}$
- b) $b = 39\text{cm}, c = 9,1\text{dm}$
- c) $a = 230\text{cm}, c = 4,9\text{m}$

4. Aufgabe: Vektoren, LGS und Matrizen

- a) Gegeben sei $a_t \in \mathbb{R}^2$ $a_t = \begin{pmatrix} 5t \\ 3t \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie t so, dass a_t auf 1 normiert ist.
- b) Gegeben seien $a, b_r \in \mathbb{R}^3$ mit $a = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \sqrt{2} \\ -3 \end{pmatrix}$ und $b_r = \begin{pmatrix} 2r \\ \sqrt{2}r \\ 5 \end{pmatrix}$. Für welches r_0 sind a, b_{r_0} orthogonal zueinander.
- c) Finden Sie einen Vektor $c \in \mathbb{R}^3$ der orthogonal zu a und b_{r_0} aus Aufgabenteil b) ist.
- d) Lösen Sie folgende Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{ll} i) & \begin{array}{l} 3x + y = 5 \\ 2x - 2y = 6 \end{array} \\ ii) & \begin{array}{l} x + 3y - z = -2 \\ -2x - 2y + 3z = 5 \\ 2x + 7y - 2z = -4 \end{array} \end{array}$$

- e) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 8 & 2 & 7 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 6 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie: $\text{tr}(A)$, $\text{tr}(B)$, $\text{tr}(A + B)$, $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(A + B)$, $\det(A \cdot B)$.

5. Aufgabe: Differenzialrechnung

Bestimmen Sie die erste Ableitung für die folgenden Funktionen:

- i) $f_1(x) = x^x$
- ii) $f_2(x) = e^{-x^2}$
- iii) $f_3(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x^2+1}}$
- iv) $f_4(x) = \ln(\sin(x))$
- v) $f_5(x) = \tan(x)$
- vi) $f_6(x) = \frac{1}{\tan(x)}$

6. Aufgabe: Integralrechnung

Lösen Sie die folgenden bestimmten, bzw. unbestimmten Integrale:

i) $\int_0^\pi \sin(x)^2 dx$

ii) $\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx$

iii) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x^2 \tan(x)}{\sqrt{1+x^4}} dx$

iv) $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$

v) $\int \ln(x) dx$

vi) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$