

Vorkurs Mathematik

Übungen zu Differenzieren im Mehrdimensionalen

1 Aufgaben

Partielle Ableitungen und der Nabla-Operator

Aufgabe 1.1 Gegeben sei das skalare Feld $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi(\vec{r}) = -\vec{r}^2 + \frac{1}{4}(\vec{r}^2)^2,$$

wobei $\vec{r} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ ist und mit $\vec{r}^2$ das Skalarprodukt von $\vec{r}$ mit sich selbst gemeint ist:
 $\vec{r}^2 := \vec{r} * \vec{r}$.

1. Berechne $\partial_x \varphi := \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\partial_y \varphi$ und $\partial_z \varphi$.
2. Berechne $\partial_x^2 \varphi := \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial x}$, $\partial_y^2 \varphi$ und $\partial_z^2 \varphi$.
3. Berechne $\partial_x \partial_y \varphi$, $\partial_y \partial_x \varphi$, $\partial_x \partial_z \varphi$, $\partial_z \partial_x \varphi$, $\partial_y \partial_z \varphi$ und $\partial_z \partial_y \varphi$.

Aufgabe 1.2 Gegeben seien das skalare Feld $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ und das Vektorfeld $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\varphi(\vec{r}) = xy + yz + zx, \quad \vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ y^2 z \\ z^2 x \end{pmatrix}$$

1. Berechne $\vec{\nabla} \varphi$, $\vec{\nabla} * \vec{A}$ und $\vec{\nabla} \times \vec{A}$.
2. Berechne $\vec{\nabla} \times (\varphi \vec{A})$, $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi)$ und $\vec{\nabla} * (\vec{\nabla} \times \vec{A})$.
3. Berechne $\varphi(\vec{\nabla} \times \vec{A})$ und $(\vec{\nabla} \varphi) \times \vec{A}$.

Aufgabe 1.3 Beweise die Relation

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} * \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$$

für das Vektorfeld $\vec{A}$ aus Aufgabe 0.2.