

Vorkurs Mathematik

Übungen zu Integration im $\mathbb{R}^n$

1 Integration im $\mathbb{R}^n$

1.1 Substitution (wird am Do vormittag erklärt)

Aufgabe 1.1 Berechnen Sie mittels substitution $x = \ln(z)$ das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx$$

Tipp: Verwenden Sie dabei $e^{\ln(z)} = z$ und den Trick

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{(x+1)} = \frac{(x+1)}{x(x+1)} - \frac{x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$$

1.2 Mehrfachintegrale

Aufgabe 1.2 Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_0^\pi \int_0^1 r^2 \sin(\phi) dr d\phi$$

Aufgabe 1.3 (Nicht konstante Integrationsgrenzen): Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \int_0^z \int_0^y 6x + 4y^2 + 2z^3 dx dy dz$$

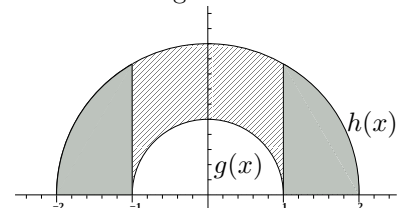
Aufgabe 1.4 (Integrationsbereich zerteilen): Berechnen Sie

$$\int_{-2}^2 \int_{g(x)}^{h(x)} y - 2x dy dx \quad \text{wobei } g \text{ und } h \text{ gegeben sind durch:}$$

$$g(x) := \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & \text{falls } -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$h(x) := \begin{cases} \sqrt{4-x^2}, & \text{falls } -2 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Skizze zu Aufgabe 1.4



Hinweis: Sie müssen das äußere Integral in drei Teile teilen. In der Skizze sehen Sie den Integrationsbereich dargestellt. Wenn Ihnen das Lösen des Integrals zu mühselig ist, dann schauen Sie sich lieber Aufgabe 1.6 an!

1.3 Koordinatenwechsel

Aufgabe 1.5 (Fläche): Berechnen Sie die Fläche einer Kreisscheibe mit Radius 5 mit Hilfe von Polarkoordinaten.

Aufgabe 1.6 (Zusatzaufgabe): Berechnen Sie die Fläche des Integrationsbereiches in Aufgabe 1.4 mittels Polarkoordinaten. Falls Sie danach noch Zeit haben, berechnen Sie das Integral aus Aufgabe 1.4 mittels Polarkoordinaten (dabei die Integrationsgrenzen verwenden, die Sie gerade für den ersten Teil dieser Aufgabe verwendet hatten).

2 Lösungen

Lösungen für Aufgabe 1.1

Substituiert werden soll $x = \ln(z)$, entsprechend benötigt man die folgende Nebenrechnung:

$\begin{array}{l} x = \ln(z) \\ e^x = z \end{array}$	$\left \quad \frac{dx}{dz} = (\ln(z))' = \frac{1}{z} \Leftrightarrow dx = \frac{1}{z} dz \right $	$\begin{array}{l} x_1 = 0 \Rightarrow z_1 = e^0 = 1 \\ x_2 = 1 \Rightarrow z_2 = e^1 = e \end{array}$
--	--	---

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx = \int_1^e \frac{1}{e^{\ln(z)} + 1} \frac{1}{z} dz = \int_1^e \frac{1}{(z+1)z} dz$$

Das neu erhaltene Integral lässt sich mit dem Trick $\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{(z+1)}$ wie folgt lösen:

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{1}{(z+1)z} dz &= \int_1^e \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} \right) dz = [\ln(z) - \ln(z+1)]_{z=1}^e \\ &= \ln(e) - \ln(e+1) - \underbrace{(\ln(1) - \ln(2))}_{=0} = \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right) \end{aligned}$$

Lösungen für Aufgabe 1.2

Zu berechnen ist das folgende Integral:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \int_0^1 r^2 \sin(\phi) dr d\phi &= \int_0^\pi \left[\frac{r^3}{3} \sin(\phi) \right]_{r=0}^1 d\phi \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{3} \sin(\phi) d\phi = \left[-\frac{1}{3} \cos(\phi) \right]_{\phi=0}^\pi = -\frac{1}{3}(-1) - \left(-\frac{1}{3} \cdot 1\right) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Lösungen für Aufgabe 1.2

Zu berechnen ist das folgende Integral:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^z \int_0^y 6x + 4y^2 + 2z^3 dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^z [3x^2 + 4xy^2 + 2xz^3]_{x=0}^y dy dz \\ &= \int_0^1 \int_0^z 3y^2 + 4y^3 + 2yz^3 dy dz = \int_0^1 [y^3 + y^4 + \frac{2}{5}y^5 z^3]_{y=0}^z dz \\ &= \int_0^1 z^3 + z^4 + z^5 dz = \left[\frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^6}{6} \right]_{z=0}^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Lösungen für Aufgabe 1.2

Als Gesamtlösung für das gesuchte Integral ergibt sich:

$$\int_{-2}^2 \int_{g(x)}^{h(x)} y - 2x dy dx = 4 + \frac{2}{3}$$

Das Berechnen des Integrals in gewöhnlichen Koordinaten ist *sehr* rechenaufwändig! In Polarkoordinaten (s. Aufg. 1.6) ist das Berechnen *wesentlich*(!!) einfacher. Wichtigster Lernschritt bei dieser Aufgabe ist also: Ein Koordinatenwechsel kann sich manchmal erheblich lohnen!

Im gesamten Integrationsbereich gilt $h(x) = \sqrt{4-x^2}$, allerdings ist $g(x)$ eine zusammengesetzte Funktion. D.h., der Integrationsbereich für x muss in 3 Teile geteilt werden, auf denen $g(x)$ nicht zusammengesetzt ist:

- für $x \in [-2, -1]$ gilt $g(x) = 0$
- für $x \in [-1, 1]$ gilt $g(x) = \sqrt{1-x^2}$
- für $x \in [1, 2]$ gilt $g(x) = 0$.

Wir setzen $f(x, y) = y - 2x$ und erhalten:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \int_{g(x)}^{h(x)} y - 2x \, dy \, dx &= \underbrace{\int_{-2}^{-1} \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) \, dy \, dx}_{=\frac{5}{6}+2\sqrt{3}} + \underbrace{\int_{-1}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) \, dy \, dx}_{=3} + \underbrace{\int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) \, dy \, dx}_{=\frac{5}{6}-2\sqrt{3}} \\ &= 3 + 2\frac{5}{6} = 4 + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Wir berechnen die einzelnen Integrale nun jeweils in einer Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{-1} \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y - 2x \, dy \, dx &= \int_{-2}^{-1} \left[\frac{y^2}{2} - 2xy \right]_{y=0}^{\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= \int_{-2}^{-1} \frac{4-x^2}{2} - 2x \cdot \sqrt{4-x^2} \, dx \\ &= \left[2x - \frac{x^3}{6} + \frac{2}{3} (4-x^2)^{3/2} \right]_{x=-2}^{-1} \\ &= -2 + \frac{1}{6} + \frac{2}{3}\sqrt{3^3} - \left(-4 + \frac{8}{6} + 0 \right) = \frac{5}{6} + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} y - 2x \, dy \, dx &= \int_{-1}^1 \left[\frac{y^2}{2} - 2xy \right]_{y=\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{4-x^2}{2} - 2x\sqrt{4-x^2} - \left(\frac{1-x^2}{2} - 2x\sqrt{1-x^2} \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{3}{2} - 2x \cdot \sqrt{4-x^2} - \left(-2x\sqrt{1-x^2} \right) dx \\ &= \left[\frac{3}{2}x + \frac{2}{3} (4-x^2)^{3/2} - \frac{2}{3} (1-x^2)^{3/2} \right]_{x=-1}^1 \\ &= \frac{3}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{3^3} - 0 - \left(-\frac{3}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{3^3} - 0 \right) = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y - 2x \, dy \, dx &= \int_1^2 \left[\frac{y^2}{2} - 2xy \right]_{y=0}^{\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= \int_1^2 \frac{4-x^2}{2} - 2x \cdot \sqrt{4-x^2} \, dx \\ &= \left[2x - \frac{x^3}{6} + \frac{2}{3} (4-x^2)^{3/2} \right]_{x=1}^2 \\ &= 4 - \frac{8}{6} + 0 - \left(2 - \frac{1}{6} + \frac{2}{3}\sqrt{3^3} \right) = \frac{5}{6} - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Lösungen für Aufgabe 1.5

Zu lösen ist das Integral

$$\int_B 1 \, dx \, dy$$

wobei B die Kreisscheibe mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius 1 ist.

Beim Wechsel von kartesischen Koordinaten (" x und y ") zu Polarkoordinaten (" r und ϕ ") tritt der Korrekturterm " $\det(Df)$ " auf:

Für die Koordinatenwechselfunktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(r, \phi) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos(\phi) \\ r \sin(\phi) \end{pmatrix}$ gilt:

$$(Df) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -r \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & r \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \det(Df) = r \cos(\phi)^2 + r \sin(\phi)^2 = r$$

Entsprechend erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_B 1 \, dx \, dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 1 \, r \, dr \, d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^1 d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\phi = \left[\frac{\phi}{2} \right]_{\phi=0}^{2\pi} = \pi \end{aligned}$$

Lösungen für Aufgabe 1.6

Wie in Aufgabe 1.5 (s.Lösung) benötigen wir beim Wechsel von kartesischen Koordinaten zu Polarkoordinaten neben dem eigentlichen Ersetzen der Variablen noch den Korrekturterm “ r ”. Wir erhalten das folgende:

$$x = r \cos(\phi) \quad y = r \sin(\phi) \quad dx \, dy = r \, dr \, d\phi$$

Der Integrationsbereich B in Aufg. 1.6 ist ein Halbkreissegment, mit Radius $r \in [1, 2]$ und Öffnungswinkel $\phi \in [0, \pi]$. Um dessen Fläche zu berechnen müssen wir das folgende Integral lösen:

$$\begin{aligned} \int_B 1 \, dx \, dy &= \int_0^\pi \int_1^2 1 \, r \, dr \, d\phi \\ &= \int_0^\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=1}^2 d\phi = \int_0^\pi \frac{3}{2} d\phi = \left[\frac{3}{2} \phi \right]_{\phi=0}^\pi = \frac{3}{2} \pi \end{aligned}$$

Um das Integral aus Aufg. 1.6 zu berechnen setzen wir in den Integranden $y - 2x$ die Werte $x = r \cos(\phi)$ und $y = r \sin(\phi)$ ein:

$$\begin{aligned} \int_B y - 2x \, dx \, dy &= \int_0^\pi \int_1^2 (r \sin(\phi) - 2r \cos(\phi)) \, r \, dr \, d\phi \\ &= \int_0^\pi \left[\frac{r^3}{3} \sin(\phi) - \frac{r^3}{3} 2 \cos(\phi) \right]_{r=1}^2 d\phi = \int_0^\pi \frac{7}{3} \sin(\phi) - \frac{14}{3} \cos(\phi) \, d\phi \\ &= \left[-\frac{7}{3} \cos(\phi) - \frac{14}{3} \sin(\phi) \right]_{\phi=0}^\pi = -\frac{7}{3}(-1) + 0 - \left(-\frac{7}{3}(1) + 0 \right) = \frac{14}{3} = 4 + \frac{2}{3} \end{aligned}$$