Mathe-Vorkurs
Aufgaben Vektoren in Komponentendarstellung

1.: Vektoren in Komponentendarstellung

Seien $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3} \in \mathbb{R}^3$ die orthogonalen Einheitsvektoren in x-, y- und z-Richtung.

(i) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke

(a) $\vec{e_1} \cdot (\vec{e_2} - 5\vec{e_3})$

(b) $(\vec{e_1} + 5\vec{e_2}) \cdot (8\vec{e_2} - 6\vec{e_2})$

(c) $(6\vec{e_1} + 4\vec{e_2} + \vec{e_3}) \cdot (2\vec{e_1} - 6\vec{e_2} + 18\vec{e_3})$

(ii) Bstimmen Sie den Paramter $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren $\vec{a} = \vec{e_1} - 2\alpha\vec{e_2} + 7\alpha\vec{e_3}$ und $\vec{b} = 24\vec{e_1} + \frac{\alpha}{3}\vec{e_2} + 0\vec{e_3}$ orthogonal zueinander sind.

(iii) Welche Länge hat die Projektion des Vektors $\vec{a} = -\vec{e_1} + 2\vec{e_2} + 3\vec{e_3}$ auf die Richtung des Vektors $\vec{b} = 2\vec{e_1} - 6\vec{e_2} + 2\vec{e_3}$?

(iv) Bestimmen Sie den Winkel

(a) zwischen den Vektoren $\vec{a} = -\vec{e_1} + 2\vec{e_2} + 3\vec{e_3}$ und $\vec{b} = 2\vec{e_1} - 6\vec{e_2} + 2\vec{e_3}$

(b) zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $2\vec{a}$

(v) Zerlegen Sie den Vektor $\vec{a} = 3\vec{e_1} + \vec{e_2} - \vec{e_3}$ in einen Vektor $\vec{a}_\perp$ senkrecht und einen Vektor $\vec{a}_\parallel$ parallel zum Vektor $\vec{b} = \vec{e_1} + 2\vec{e_2} + \vec{e_3}$. Überprüfen Sie anschließend, dass $\vec{a}_\perp \cdot \vec{a}_\parallel = 0$ gilt.

(vi) Bestimmen Sie all jene Einheitsvektoren, die orthogonal zum Vektor $\vec{e_3}$ sind.

2.: Levi-Civita-Symbol

(a) Gegeben sein die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^3$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

Beweisen Sie die sogenannte Jacobi-Identität

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

(b) Beiweisen Sie folgenden Kontraktionsidentitäten für das Levi-Cicita-Symbol

(i) $\sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{mjk} = 2\delta_{im}$

(ii) $\sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$

(c) Entwickeln Sie die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{d}$ in der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$, gegeben durch die kartesischen Einheitsvektoren $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3} \in \mathbb{R}^3$. Verwenden Sie diese Entwicklung nun, um die folgenden Relationen zu beweisen:

(i) $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

(ii) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$

(d) <u>Zusatzaufgabe:</u> Gegeben sei ein Vektorfeld $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \vec{\nabla}^2 \vec{A})$$