# Vorkurs Mathematik
# Übungen zu Integralen

## Unbestimmte Integrale

**Aufgabe 1** Berechne die folgenden unbestimmten Integrale

a) $\int 3x^2 - \frac{1}{2}x + 1dx$ b) $\int t^2 + 1dt$ c) $\int (x+2)^2\, dx$

d) $\int e^{(4x)}dx$ e) $\int e^{(2x+1)}dx$ f) $\int \cos(3x+4)dx$

**Aufgabe 2** Berechne die folgenden unbestimmten Integrale mit partieller Integration

a) $\int x\cos(x)dx$ b) $\int x\ln(x)dx$ c) $\int xe^{2x+1}dx$ d) $\int x^2e^xdx$

**Aufgabe 3** Berechne die folgenden unbestimmten Integrale mittels einfacher Substitution.

a) $\int 3x\cos(x^2)dx$ b) $\int xe^{\left(x^2\right)}dx$ c) $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$ d) $\int x^3e^{\left(x^4\right)}dx$

Tip: Passe die Konstanten geeignet an.

**Aufgabe 4** 1) Mit welcher Methode wuerdest du die folgenden unbestimmten Integrale loesen? 2) Berechne die Integrale e) und f), der Rest ist “freiwillig”.

a) $\int 5x^{12} - 12x^2 + 1dx$ b) $\int xe^{(x)}dx$ c) $\int \frac{1}{x+1}dx$

d) $\int (x+2)^{36}\, dx$ e) $\int \ln(x)dx$ f) $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x}dx$

Tip zu e): mache etwas unsichtbares sichtbar.

## Bestimmte Integrale

**Aufgabe 5** Berechne die folgenden bestimmten Integrale:

a) $\int_1^2 3x^2 - 6x + 2\, dx$ b) $\int_0^{2\pi} \cos(x)\, dx$ c) $\int_0^{e-1} \frac{2}{x+1}\, dx$

d) $\int_{-1}^1 (x+3)^3\, dx$ e) $\int_1^e \ln(x)\, dx$ f) $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\, dx$

## Zusatzaufgabe

**Aufgabe 6** Den Flaecheninhalt $F$ eines Kreises mit Radius 1 berechnet man mittels

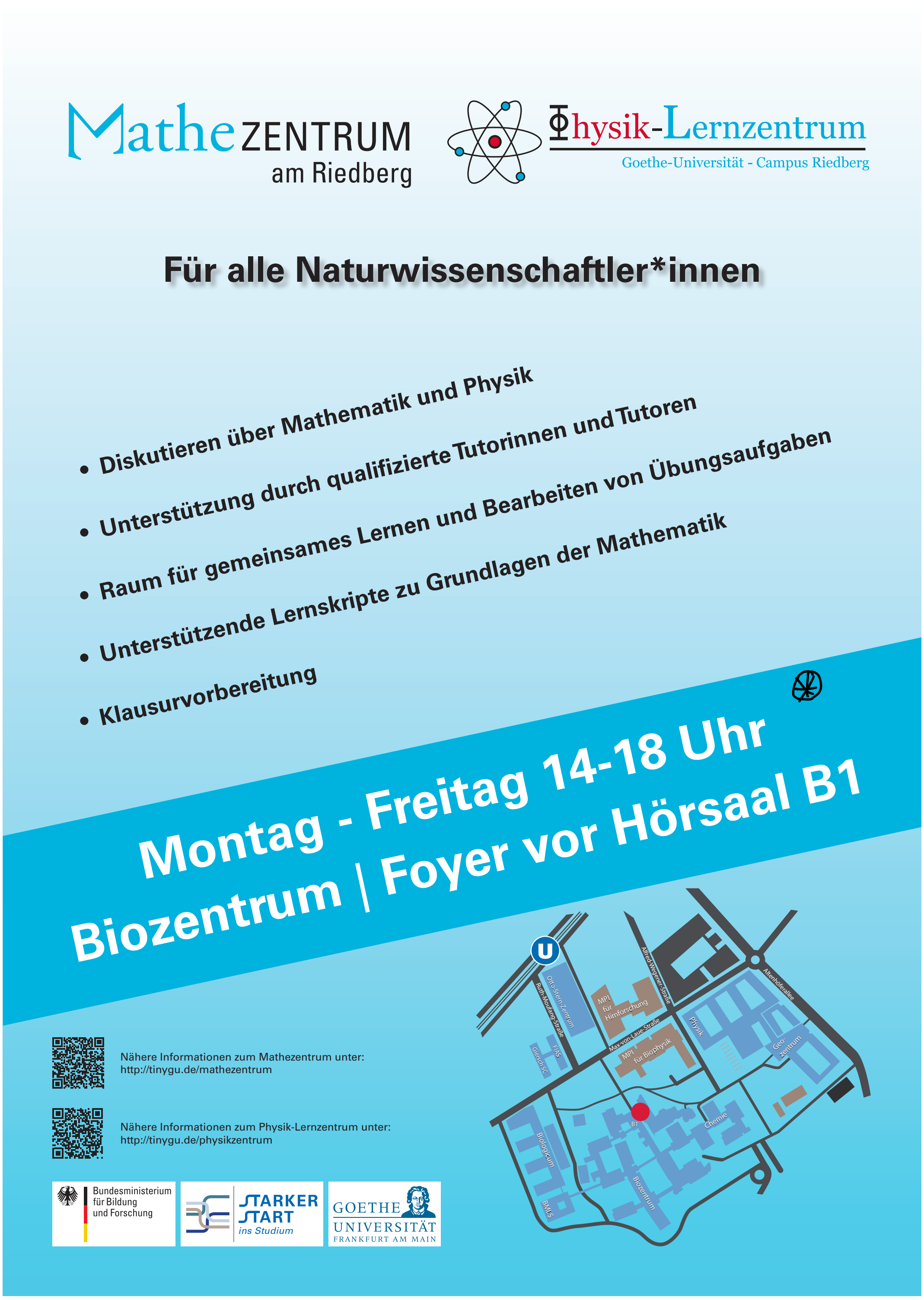
$$F = \int_0^{2\pi} \cos^2(x)dx.$$

Berechne das Integral, indem du partiell integrierst, und dann $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ nutzt. Dann einmal *geschickt* die Gleichung umformen und *erst dann* integrieren. . .

**Aufgabe 7** Berechne die folgenden unbestimmten Integrale mit Partialbruchzerlegung (PBZ).

a) $\int \frac{2x+1}{x^2-x-2}dx$ b) $\int \frac{x+1}{2x^2-x-1}dx$ c) $\int \frac{1}{x^2-16}dx$

Tips: a) $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$ und b) $2x^2-x-1=(x-1)(2x+1)$




⊛: ab der zweiten Vorlesungswoche

# 1 Lösungen

**Lösungen** für Aufgabe 1

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a) | $\int 3x^2 - \frac{1}{2}x + 1dx$ | $= x^3 - \frac{1}{4}x^2 + x + c$ | d) | $\int e^{(4x)}dx$ | $= \frac{1}{4}e^{(4x)} + c$ |
| b) | $\int t^2 + 1dt$ | $= \frac{1}{3}t^3 + t + c$ | e) | $\int e^{(2x+1)}dx$ | $= \frac{1}{2}e^{(2x+1)} + c$ |
| c) | $\int (x+2)^2\, dx$ | $= \frac{1}{3}(x+2)^3 + c$ | f) | $\int \cos(3x+4)dx$ | $= \frac{1}{3}\sin(3x+4) + c$ |

**Lösungen** für Aufgabe 2

a) $\int x \cdot \cos(x)dx = x\sin(x) - \int 1\sin(x)dx = x\sin(x) + \cos(x) + c$

b) $\int x \cdot e^{2x+1}dx = x\,\frac{1}{2}e^{2x+1} - \int 1\,\frac{1}{2}e^{2x+1}dx = x\frac{1}{2}e^{2x+1} - \frac{1}{4}e^{2x+1} + c = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2x+1} + c$

c) $\int \ln(x) \cdot x\,dx = \ln(x)\frac{1}{2}x^2 - \underbrace{\int \frac{1}{x}\frac{1}{2}x^2dx}_{=\int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{4} + c} = x^2\left(\frac{\ln(x)}{2} - \frac{1}{4}\right) + c$

d) $\int x^2 \cdot e^x dx = x^2e^x - \int 2xe^x dx \overset{(*)}{=} x^2e^x - (2xe^x - 2e^x) + c = (x^2 - 2x + 2)e^x + c$

$\int 2xe^x dx = 2xe^x - \int 2e^x dx = 2xe^x - 2e^x + c$ (*)

**Lösungen** für Aufgabe 3

a) $\int 3x\cos(x^2)dx = \frac{3}{2}\int 2x \cdot \cos(x^2)dx = \frac{3}{2}\sin(x^2) + c$

b) $\int xe^{(x^2)}dx = \frac{1}{2}\int 2x \cdot e^{(x^2)}dx = \frac{1}{2}\,e^{(x^2)} + c$

c) $\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \int 2x \cdot \frac{1}{(x^2+1)}dx = \ln\left(x^2+1\right) + c$

d) $\int x^3e^{(x^4)}dx = \frac{1}{4}\int 4x^3 \cdot e^{(x^4)}dx = \frac{1}{4}\,e^{(x^4)} + c$

**Lösungen** für Aufgabe 4

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | $\int 5x^{12} - 12x^2 + 1dx$ | $= \frac{5}{13}x^{13} - 4x^3 + x + c$ | Summe auseinander ziehen. |
| b) | $\int xe^{(x)}dx$ | $= (x-1)e^x + c$ | partielle Integration |
| c) | $\int \frac{1}{x+1}dx$ | $= \ln(x+1) + c$ | direkt integrieren |
| d) | $\int (x+2)^{36}\, dx$ | $= \frac{1}{37}(x+2)^{37} + c$ | einfache Substitution |
| e) | $\int \ln(x)dx$ | $= \int 1 \cdot \ln(x)dx = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln(x) - x + c$ | partielle Integration |
| f) | $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x}dx$ | $= \frac{1}{3}\int (3x^2+3) \cdot \frac{1}{(x^3+3x)}dx = \frac{1}{3}\ln\left(x^3+3x\right) + c$ | einfache Substitution |

Alternative Lösungsmöglichkeit für f): s. unten

$$\begin{aligned}
\text{f)}\quad \int \frac{x^2+1}{x^3+3x}dx &= \int \frac{x^2}{x^3+3x}dx && + \int \frac{1}{x^3+3x}dx && \text{Summe auseinanderziehen}\\
&= \int \frac{x}{x^2+3}dx && + \int \frac{1}{x(x^2+3)}dx && \text{1) Kürzen. 2) PZB s.}(*)\\
&\overset{(*)}{=} \int \frac{x}{x^2+3}dx && -\frac{1}{3}\int \frac{x}{x^2+3}dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}dx\\
&= \frac{1}{3}\int (2x)\frac{1}{(x^2+3)}dx && +\frac{1}{3}\int \frac{1}{x}dx && \text{1) einfache Substitution.}\\
&= \ln(x^2+3)/3 && +\ln(x)/3+c && = \ln((x^2+3)x)/3+c.
\end{aligned}$$

(∗)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1) Ansatz | | $\frac{A}{x}$ | $+\frac{Bx+C}{(x^2+3)}$ | $= \frac{1}{x(x^2+3)}$ | $\mid \cdot x(x^2+3)$ |
| 2) Multiplizieren | $\Leftrightarrow$ | $A(x^2+3)$ | $+(Bx+C)(x)$ | $=1$ | |
| & Kürzen: | $\Leftrightarrow$ | $(A+B)x^2$ | $+Cx+3A$ | $=1$ | |
| 3) Gleichungen | $\Leftrightarrow$ | $\left\{\begin{array}{lrl}(x^2) & A+B & =0\\ (x) & C & =0\\ (1) & A & =1/3\end{array}\right\}$ | | $\Leftrightarrow\ A=\frac{1}{3},\ B=-\frac{1}{3},\ C=0$ | |
| 4) Ausrechnen | | $\int \frac{1}{x(x^2+1)}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{3}\int \frac{x}{(x^2+3)}dx = +c$ | | | |

**Lösungen** für Aufgabe 5

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\quad \int_1^2 3x^2-6x+2\,dx && = \left[x^3-3x^2+2x\right]_1^2 && = (8-12+4)-(1-3+2) = 0-0 = 0\\
&\text{b)}\quad \int_0^{2\pi} \cos(x)\,dx && = [-sin(x)]_0^{2\pi} && = (-sin(2\pi))-(-\sin(0)) = 0-0 = 0\\
&\text{c)}\quad \int_0^{e-1} \frac{2}{x+1}\,dx && = [2\ln(x+1)]_0^{e-1} && = (2\ln(e))-(2\ln(1)) = 2-0 = 2\\
&\text{d)}\quad \int_{-1}^{1} (x+3)^3\,dx && = \left[\tfrac{1}{4}(x+3)^4\right]_{-1}^{1} && = (\tfrac{1}{4}(4)^4)-(\tfrac{1}{4}(2)^4) = 4^3-4 = 64-4 = 60\\
&\text{e)}\quad \int_1^e \ln(x)\,dx && = [x\ln(x)-x]_1^e && = (e\ln(e)-e)-(1\cdot\ln(1)-1) = (e\cdot 1-e)-(0-1) = 1\\
&\text{f)}\quad \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx && = \int_0^3 (x+1)^{-1/2}\,dx && = \left[2\,(x+1)^{1/2}\right]_0^3 = (2\sqrt{4})-(2\sqrt{1}) = 2\cdot 2-2 = 2
\end{aligned}$$

**Lösung** für Aufgabe 6

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos(x)\cdot\cos(x)dx &= [\sin(x)\cos(x)]_0^{2\pi} && -\int_0^{2\pi} \sin(x)(-\sin(x))dx\\
&= 0\cdot 1 - 0\cdot 1 && +\int_0^{2\pi} \sin(x)\sin(x)dx\\
&= 0\cdot 1 - 0\cdot 1 && +\int_0^{2\pi} 1-\cos(x)\cos(x)dx\\
\Leftrightarrow\quad 2\int_0^{2\pi} \cos(x)\cdot\cos(x)dx &= +\int_0^{2\pi} 1dx\ \ (=2\pi)
\end{aligned}$$

Der Wert des Integrals beträgt $\pi$.

**Lösung** für Aufgabe 7

a) $\int \frac{2x+1}{x^2-x-2}dx$ b) $\int \frac{x+1}{2x^2-x-1}dx$ c) $\int \frac{1}{x^2-16}dx$

**Teil a)**

$$\begin{array}{llllll}
\text{0) Faktorisieren} & & x^2-x-2=(x-2)(x+1) & & & \\
\text{1) Ansatz} & & \frac{A}{(x-2)} \quad +\frac{B}{(x+1)} & = & \frac{2x+1}{(x-2)(x+1)} & \mid \cdot (x-2)(x+1) \\
\text{2) Multiplizieren \& Kürzen:} & \Leftrightarrow & A(x+1) \quad +B(x-2) & = & (2x+1) & \\
\text{3) Gleichungen} & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{llll} (x) & A & +B & =2 \\ (1) & A & -2B & =1 \end{array} \right\} & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{llll} (x) & A & +B & =2 \\ (1) & A & & =1+2B \end{array} \right. & \\
\text{4) Einsetzen} & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{llll} (x) & 1+2B & +B & =2 \\ (1) & A & & =1+B \end{array} \right\} & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{lll} (x) & B & =\frac{1}{3} \\ (1) & A & =1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3} \end{array} \right. &
\end{array}$$

4) Ausrechnen $\quad$ a) $= \int \frac{5}{3}\frac{1}{(x-2)} + \frac{1}{3}\frac{1}{(x+1)}dx = \frac{5}{3}\ln(x-2) + \frac{1}{3}\ln(x+1) + c$

**Teil b)**

$$\begin{array}{llllll}
\text{0) Faktorisieren} & & 2x^2-x-1=(x-1)(2x+1) & & & \\
\text{1) Ansatz} & & \frac{A}{(x-1)} \quad +\frac{B}{(2x+1)} & = & \frac{x+1}{(x-1)(2x+1)} & \mid \cdot (x-1)(2x+1) \\
\text{2) Multiplizieren \& Kürzen:} & \Leftrightarrow & A(2x+1) \quad +B(x-1) & = & (x+1) & \\
\text{3) Gleichungen} & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{llll} (x) & 2A & +B & =1 \\ (1) & A & -B & =1 \end{array} \right\} & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{llll} (x) & 2A & +B & =1 \\ (1) & A & & =1+B \end{array} \right. & \\
\text{4) Einsetzen} & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{llll} (x) & 2+2B & +B & =1 \\ (1) & A & & =1+B \end{array} \right\} & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{lll} (x) & B & =-\frac{1}{3} \\ (1) & A & =1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \end{array} \right. &
\end{array}$$

4) Ausrechnen $\quad$ b) $= \int \frac{2}{3}\frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{3}\frac{1}{(2x+1)}dx = \frac{2}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\ln(2x+1) + c$

**Teil c)**

$$\begin{array}{llllll}
\text{0) Faktorisieren} & & x^2-16=(x-4)(x+4) & & & \\
\text{1) Ansatz} & & \frac{A}{(x-4)} \quad +\frac{B}{(x+4)} & = & \frac{1}{(x-4)(x+4)} & \mid \cdot (x-4)(x+4) \\
\text{2) Multiplizieren \& Kürzen:} & \Leftrightarrow & A(x+4) \quad +B(x-4) & = & 1 & \\
\text{3) Gleichungen} & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{llll} (x) & A & +B & =0 \\ (1) & 4A & -4B & =1 \end{array} \right\} & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{llll} (x) & A & & =-B \\ (1) & 4(-B) & -4B & =1 \end{array} \right. & \\
 & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{lll} (x) & A & =1/8 \\ (1) & B & =-1/8 \end{array} \right\} & & &
\end{array}$$

4) Ausrechnen $\quad$ c) $= \frac{1}{8}\int \frac{1}{(x-4)} - \frac{1}{(x+4)}dx = \frac{1}{8}\ln(x-4) - \frac{1}{8}\ln(x+4) + c$